Eğitim ve Bilim
2011, Cilt 36, Sayı 160

Education and Science
2011, Vol. 36, No 160

Lineer Şekil Örüntülerine İlişkin Genelleme Stratejileri: Görsel ve Sayısal İpuçlarının Etkisi*

Generalization Strategies about Linear Figural Patterns: Effect of Figural and Numerical Clues

Dilek TANIŞLI** Nilüfer YAVUZSOY KÖSE***
Anadolu Üniversitesi

Öz

Genelleme, cebirin yapı taşlarından birisidir ve cebirsel düşünme gelişiminde önemli bir öğedir. Matematiksel bir süreçte örüntü arama ise, genellemenin biçimlenmesinde temel bir adımdır ve genellemeye ulaşmada oldukça önemlidir. Bu araştırma ile sınıf öğretmeni adaylarının lineer şekil örüntülerini genelleme stratejileri araştırılmıştır. Araştırmanın uygulaması toplam 16 sınıf öğretmeni adayı üzerinde gerçekleştirilmiştir. Araştırma verilerinin toplanmasında, nitel araştırma yöntemlerinden biri olan klinik görüşme tekniği kullanılmış ve görüşmeler video kameraya çekilmiştir. Veriler nitel olarak analiz edilmiştir. Araştırma sonucunda, kimi öğretmen adayları lineer şekil örüntüsünü yakın/uzak bir adıma devam ettirmede ve örüntünün kuralını belirlemede sadece şeklin yapısına odaklanılan görsel ve şekil örüntüsünün sayı örüntüsüne dönüştürüldüğü sayısal yaklaşımı benimsemişler, bu yaklaşımlar altında da toplam 26 strateji kullanmışlardır. Örüntüleri genellerken adaylar sayısal yaklaşım altında sadece terimler arası ilişkinin araştırıldığı yinelemeli, görsel yaklaşım altında ise hem yinelemeli hem de değişkenler arası ilişkinin araştırıldığı fonksiyonel stratejileri kullanmışlardır.

Anahtar Sözcükler: Matematik eğitimi, örüntüler, genelleme.

Abstract

Generalization is one of the fundamental building structures of algebra and an important component of development of algebraic thinking. The pattern in mathematical process is a basic step for structuring the generalization and is crucial to reach generalization. In this study, pre-service teachers' strategies to generalize linear shape patterns were investigated. Sixteen pre-service teachers participated in the treatment. For data collection, clinical interview technique was used and the interviews were recorded. The obtained data was analyzed qualitatively. It was found that while determining the rule of pattern and extending the linear shape pattern to next/far step, some pre-service teachers adapted the numerical approach through which the visual and figural patterns that focus on only shape are conveyed into numerical pattern. Under these approaches, they used 26 strategies in total. While generalizing the patterns under the numerical approach, pre-service teachers applied recursive strategies in which only the relationship between the terms were examined. On the other hand, under the figural approach, they used the functional strategies which were both recursive in examining the relationship between the variables.

Keywords: Mathematics education, patterns, generalization.

* Bu çalışmanın bir kısmı USOS 2010'da sunulmuştur.

** Yard.Doç.Dr. Dilek TANIŞLI, Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi, dtanisli@anadolu.edu.tr

*** Yard.Doç.Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE, Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi, nyavuzsoy@anadolu.edu.tr

Summary

Purpose

In this study, it was aimed to determine how primary education pre-service teachers generalize linear shape patterns to reveal how they use figural and numerical clues in this generalization process.

Results

It was determined that the pre-service teachers adopted two basic approaches as numerical and figural to extend the shape pattern and generalize the pattern, on the contrary some pre-service teachers used both of these approaches. Furthermore, it was detected that the pre-service teachers used 26 strategies within the context of these approaches.

Within numerical approach, almost all of the participants used recursive strategies while determining the square numbers at next/far step of the pattern. On the other hand, for generalizing the patterns, they mostly used the strategies of counting the distance and guess-check. Additionally, it was determined that within figural approach, the participants used functional strategies, through which the relations are discovered, as well as recursive strategies. Besides, it was ascertained that the structural features of shape influenced the use of these strategies.

Discussion

While generalizing the patterns, under the numerical approach, pre-service teachers used recursive strategies in which the relationship between only terms were examined. On the other hand, under the figural approach, they used the functional strategies which were both recursive examining the relationship between the variables (Stacey, 1989; Samsan, Linchevski, & Olivier, 1999; Lannin, 2005; Ley, 2005; Carraher et al., 2008; Amit & Neria, 2008). The finding that under the numerical approach only recursive strategies were used is not surprising considering the fact that pre-service teachers used algebraic methods to obtain the general rules of linear number sequence (arithmetic sequence) in the past by focusing on the finite difference between terms (Rivera and Becker, 2005). Moreover, the pre-service teachers' focused on the finite difference between the terms can be accepted as a numerical clue for the generalization of pattern. Within the context of the figural approach, some of these pre-service teachers associated the squares with step numbers by focusing on the changing squares in shapes (functional strategies) as different from numerical approach while some of the pre-service teachers focused on the previous shape as a figural clue (recursive strategies) as in numerical approach (Rivera, 2007). The ones who used functional strategies, could generalize the patterns by means of changing and unchanging features and relationships and justify their generalization. On the contrary, some of the pre-service teachers who made generalization through numerical strategies could not realize the pattern and could not manage the association between dependent and independent variables. On the other hand, some of the pre-service teachers did not use figural strategies since they accomplished the generalization through numerical strategies. At this point, as Rivera and Becker (2005) stated in their studies on primary and secondary education teachers, it could be claimed that the teachers who made shape based generalization had more significant understanding in accordance with numerical strategies they used, besides the teachers who made numerical generalization are inadequate to realize the patterns and justify the rules they constructed.

Furthermore, it was attracted attention that in the generalization of linear shape patterns, the structure of shapes have important a role. Hence, almost all of the pre-service teachers in the study obtained the general form of linear patters, in other words closed form (y=mx+n), by realizing the generalization related to black square numbers through structure of the shape. In the given shape patterns, increasing growth of black squares is more salient than the white. This case enables the pre-service teachers to make generalization related to the black easily. On the other hand, the changes in the white squares varied the pre-service teachers' point of views and

thus they made generalizations by employing different strategies. Beside, the participants who generalized the pattern with different strategies could obtain more than one rule related to the white squares, except the closed form (Rivera, 2007). However, that the participants could not notice the equality of the rules is one of the striking findings of the study. This case is an indicator that the pre-service teachers have deficiencies related to the concept of equality. In this study, there were some participants (2) who could generalize neither through numerical nor figural approaches. Focusing only on the finite difference between terms caused the participants not to be able to generalize. For instance; the participants stated that the rule, which is x, x+8, x+16 related to the white square numbers based on recursive approach, is sufficient (Rivera, 2007; Rivera and Becker2005; Stacey and Macgregor, 2000). Furthermore, the participants were asked to use A (step), S (black), and B (white) letter expressions while generalizing the white/black square numbers, however some of the participants preferred to use different letter expressions such as x and n. This case implies that the participants often used x and n in their past experiences. On the other hand, by asking the number of steps, some of the participants had difficulties in writing algebraic expressions that gives the relation between the number of step and square numbers (Stacey and Macgregor, 2000). This situation can also be seen the indicator for the pre-service teachers' deficiency in variable and algebraic concepts.

Conclusion

It could be claimed that in generalization of linear shape patterns, realizing the pattern, association of variables, that is discovering functional relationship, and producing various formulas which can cause a lot of work when obtained numerical strategies for the same pattern and justifying the figural strategies have important roles.

Giriş

Genelleme, matematiksel etkinliklerin merkezi ve matematiksel bilgi gelişiminin temelidir (Polya, 1957, Akt. Amit ve Neria, 2008). Aynı zamanda matematik öğretiminin temel amaçlarından biridir (NCTM, 2000) ve cebirsel kavramlara girişte önemli bir yaklaşım olarak kabul edilir. Genelleme, öğrencilerin sembolik temsilleri anlamalarına ve aritmetikteki önbilgileri arasındaki ilişkileri kurabilmelerine yardımcı olur (Lannin, 2005). Dörfler (1991, p.63; Akt. Zaskis ve Liljedahl, 2002) genellemeyi "düşünmenin bir aracı ve iletişimi" olarak tanımlar. Krutetskii (1976; Akt, Barbosa, Palhares ve Vale, 2007) ise, genellemeyi matematik öğrenenler tarafından gösterilen yüksek bilişsel yeteneklerden biri olarak sınıflar. Genellemenin gerektirdiği soyutlama, bütüncül düşünme (holistic), görselleştirme, esneklik ve akıl yürütme gibi yüksek bilişsel yetenekler başarılı öğrencileri tanımlamanın bir özelliğidir (Greenes, 1981; Sriraman 2003; Sternberg, 1979; Akt, Amit ve Neria, 2008). Örüntüler ise genellenmenin biçimlenmesinde temel bir adımdır (Jones, 1993; Akt. Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1998). Örüntüler genellemenin, genelleme ise cebirin yapı taşlarından birisi olarak görülebilir (Tanışlı ve Özdaş, 2009). Örüntüleri genelleme, çocukların cebirsel düşünme ve özellikle değişken ve fonksiyon kavramlarının gelişiminde önemli bir öğedir (Lesley ve Freiman, 2004).

Örüntüler tekrarlanan ve değişen olmak üzere iki grupta toplanmaktadır. Tekrarlanan örüntüler, tekrar birimi olarak ifade edilen, belirli birtakım öğelerin döngüsel olarak devam ettiği örüntülerdir (Threlfall, 1999). Değişen örüntüler ise, terimler arası ilişkinin genişleyen ya da daralan bir seyir izlemesi şeklinde oluşturulduğu örüntüler olup lineer, kuadratik ve diğer olmak üzere üç farklı biçimde gruplanabilir (Olkun &Yeşildere, 2007). Bu çalışma kapsamında kullanılan lineer örüntüler ise devam eden her bir terimin, bir öncekine sabit bir sayı ilave edilerek ya da çıkarılarak elde edildiği örüntüler olarak tanımlanabilir. Örüntüler sayı, şekil, tablo, grafik gibi farklı biçimlerde temsil edilebilirler.

Sayı, şekil ya da tablo ile temsil edilmiş örüntüleri genellemede öğrencilerden örüntüdeki terimlerin oluşumunda geçerli olan bir kuralı bulmaları ya da verilen kuralı örüntülerin özel durumlarını belirlemede kullanmaları istenebilir. Bu süreçte doğru ya da hatalı kullanılan pek çok strateji vardır. Bu stratejiler örüntü çeşitlerine, temsil biçimlerine ve öğrencilerin bakış açılarına göre değişiklik gösterir. Özellikle şekil temsili ile verilen örüntüleri genellemede şeklin yapısal özelliğinin de dikkate alınması ile kullanılan stratejiler çeşitlilik gösterir. Şekil örüntülerinde bazı öğrenciler görsel yöntemleri tercih ederken bazı öğrenciler ise görsel olmayan yöntemleri tercih edebilir.

Alanyazında farklı sınıf düzeylerinde şekil temsili ile verilen örüntüleri genellemede kullanılan yaklaşım ve stratejileri belirlemeye yönelik pek çok araştırmaya rastlanmaktadır. Bu araştırmalarda, şekil örüntülerinde genel olarak şeklin yapısal özelliğine odaklanıldığı görsel ve şekil örüntüsünün sayı örüntüsüne dönüştürüldüğü sayısal olmak üzere iki yaklaşım ve bu yaklaşımlar altında da pek çok stratejinin kullanıldığı dikkati çekmektedir (Stacey, 1989; Garcia-Cruz ve Martinon, 1997; Rivera ve Becker, 2003, 2005; Becker ve Rivera, 2005, 2006, Rivera, 2007). Diğer taraftan Krutetskii'nin (1976; Akt, Barbosa, Palhares ve Vale, 2007)'nin araştırmasında şekil örüntülerini genellemede analitik (görsel olmayan), geometrik (görsel) ve harmonik (görsel olmayan ve görsel), Becker ve Rivera'nın (2005) araştırmalarında ise, lineer şekil örüntülerini genelleme sürecinde sayısal, görsel ve pragmatik (şartlara göre davranan) şeklinde yaklaşımların tanımlandığı da görülmektedir. Yapılan araştırmalara bakıldığında bu yaklaşımlar altında kullanılan stratejilerin de genel olarak, örüntünün ardışık terimleri arasındaki ilişkinin araştırıldığı yinelemeli (recursive) ve değişkenler arası ilişkinin araştırıldığı belirgin (explicit/fonksiyonel ilişki) stratejiler olmak üzere iki başlıkta toplandığı da görülmektedir (Stacey, 1989; Orton ve Orton, 1999; Samsan, Linchevski ve Olivier, 1999; Lannin, 2005; Ley, 2005; Carraher ve diğerleri, 2008; Amit ve Neria, 2008). Genel formu $a_n=a_{n-1}+m$ (m terimler arası sabit fark) olan yinelemeli stratejiler, girdi (bağımsız) ve çıktı (bağımlı) değerleri arasındaki ilişkiden ziyade yalnızca çıktı değerlerine odaklanmayı içerir (Stacey, 1989; Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1998; Orton ve Orton, 1999; Lannin, Barker, Townsend, 2006). Değişkenler arası ilişkinin araştırıldığı belirgin stratejilerle ise girdi ve çıktı değerleri arasındaki ilişki diğer bir değişle fonksiyonel ilişki genellenir (Ley, 2005).

Uluslararası alanyazında da önemle vurgulandığı gibi, öğrencilerin cebirsel düşünme gelişimini sağlamak, daha sonraki matematik yaşantılarında karşılaşabilecekleri birçok güçlüğü engellemek ve ortaöğretim/yükseköğretim matematiği için iyi bir temel oluşturmak amacıyla, okulöncesi ve ilköğretim matematik programlarında örüntü etkinliklerine odaklanılması gereklidir. Örüntü etkinlikleri kapsamında ise örüntülerin genellenmesi ve bu süreçte doğru ve aynı zamanda çeşitli stratejilerin kullanımı için öğrencilerin teşvik edilmesi sağlanmalıdır. Bu teşvik öğrencilerde akıl yürütme, problem çözme, ilişkilendirme ve kanıtlama becerilerinin gelişimi için önemlidir. Uluslararası alanyazında özellikle ilköğretim düzeyinde örüntüler ve örüntülerin genellenmesi üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Türkiye'de ise örüntüler ancak 2005 yılında uygulamaya konulan İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'na dahil edildiğinden sınırlı sayıda çalışmaya rastlanmaktadır. Diğer taraftan ilköğretimde örüntü ve örüntülerin genellenmesinden sorumlu kişilerin başında da sınıf öğretmenleri ve aday öğretmenler yer almaktadır. Adaylar örüntü kavramı ile yükseköğretim programlarında matematik öğretimi ve özel öğretim dersleri kapsamında ilk kez karşılaşmaktadır. Dolayısıyla özellikle sınıf öğretmeni adaylarının yetiştirecekleri öğrenciler dikkate alındığında örüntüleri nasıl genellediklerinin ve bu süreçte çeşitli ve etkin stratejileri kullanıp kullanmadıklarının ya da nasıl kullandıklarının bilinmesi önemlidir. Ayrıca Türkiye'de konuya ilişkin sınırlı çalışmalar göz önüne alındığında bu çalışmanın alana katkı sağlayacağı söylenebilir.

Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın genel amacı, sınıf öğretmeni adaylarının lineer şekil örüntülerini genelleme stratejilerini araştırmaktır. Belirtilen bu genel amaç kapsamında aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır. Sınıf öğretmeni adayları;

1.Şekil örüntülerini nasıl genelliyorlar?

2.Şekil örüntülerini genellerken sayısal ya da görsel ipuçlarını nasıl kullanıyorlar?

Yöntem

Sınıf öğretmeni adaylarının şekil örüntülerini genelleme stratejilerinin belirlenmesinin amaçlandığı bu araştırmanın verilerinin toplanması, çözümlenmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir.

Katılımcılar

Araştırmanın katılımcılarını Eğitim Fakültesi Sınıf Öğretmenliği 3. sınıf öğretmeni adayları oluşturmaktadır. Araştırmaya gönüllü olmak üzere toplam 16 öğretmen adayı katılmıştır. Katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme kullanılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2003). Öğretmen adaylarının seçiminde kullanılan ölçüt, sınıf öğretmenliği programında yer alan "Matematik Öğretimi I" dersini almış olmaktır. Bu araştırmanın sonuçları dikkate alınarak bu ders kapsamında araştırmanın devamı niteliğinde başka bir araştırma planlandığından katılımcılar 3. sınıf adayları arasından seçilmiştir. Gizlilik esas alındığından bulgular kısmında adayların gerçek isimleri yerine takma isimler kullanılmıştır.

Verilerin Toplanması

Bu araştırmanın verilerinin toplanmasında, görüşme tekniğinin bir çeşidi olan ve matematik eğitiminde sıklıkla kullanılan klinik görüşme tekniği kullanılmıştır. Klinik görüşme, bilgi yapısının biçimini ve akıl yürütme sürecini araştırmak, öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine incelemek için öğrenciyle karşılıklı yapılan görüşmeleri içerir (Clement, 2000). Araştırmada, Ek 1'de verilen Becker ve Rivera (2005) tarafından hazırlanan lineer şekil örüntüsünden oluşan klinik görüşme görevi kullanılmıştır. Bu çalışmada lineer şekil örüntüsünün seçilmesinin nedeni, çalışmanın katılımcılarının sınıf öğretmeni adayı olması ve ilköğretim birinci basamakta sadece bu örüntü türüne yer verilmesidir. Daha sonra bu göreve ilişkin klinik görüşme soruları hazırlanmış ve bu sorularda *"Nasıl bulduğunu açıklar mısın?", "Siyah ve beyaz kare sayılarını daha farklı bir yol ile de bulabilir misin?", "Kuralın … olduğuna nasıl karar verdin?","Kuralı daha farklı bir yol ile de bulabilir misin?"* şeklindeki soru biçimlerine yer verilmiştir. Ayrıca soruların tam olarak anlaşılamama olasılığına karşın alternatif ve sonda sorular da sorulmuştur (Clement, 2000). Hazırlanan görev, araştırmada yer alan katılımcılara benzer bir gruba uygulanarak pilot çalışması yapılmıştır. Pilot çalışma sonucunda klinik görüşme sorularının net anlaşıldığı görülmüş, ancak bazı görüşme soruları için ek sonda sorular hazırlanarak görev uygulamaya hazır hale getirilmiştir.

İşlem

Klinik görüşmeler öğretmen adaylarının kendilerini rahat hissettikleri, sessiz bir ortamda yapılmıştır. Klinik görüşmelere başlanmadan önce, görüşme yapılacak adaylardan görüşme izni alınmış ve görüşmeler video kameraya çekilmiştir. Video kamera, adayların dikkatini dağıtmayacak şekilde onları, kullandıkları çalışma kâğıtlarını ve araştırmacıyı görebilecek biçimde yerleştirilmiştir. Araştırmacı, görüşmeler sırasında öğrenci ile etkileşim içinde olduğundan, video kamera çekimlerinde bir eleman kullanılmıştır. Görüşmeler sırasında yanıta nasıl ulaştıklarının önemli olduğu açıklanarak, adaylardan sesli düşünmeleri ve çözümlerini açıklamaları istenmiştir. Adaylara çözümlerini gerçekleştirebilmeleri için yeterince süre tanınmış ve görüşmeler minimum 30 dk. ile maksimum 60 dk. arasında sürmüştür.

Veri Analizi

Verilerin analizinde, öncelikle iki araştırmacı bağımsız çalışarak verileri kodlamıştır. Daha sonra kodlama güvenirlik çalışması yapılmıştır (Miles ve Huberman, 1994). Bazı kodlamalarda alanyazında yer alan kodlar dikkate alınarak kodlara benzer isimler verilmiştir. Araştırma verileri üzerinde iki araştırmacı bağımsız çalışarak, temaları ve alt temaları oluşturmuşlardır (Bogdan ve Biklen, 1998; Merriam, 1998). Bu bağlamda veriler bir araya getirilerek incelenmiş ve ortak yönleri bulunmaya çalışılmıştır. Ortak yönleri olan veriler birer alt başlık altında gruplanmıştır. Bu alt başlıklar ise araştırmanın alt temalarını oluşturmuştur. Daha sonra alt temalar bir araya getirilerek temalar oluşturulmuş ve bunlar birbiriyle ilişkili ve anlamlı bir bütün oluşturacak şekilde düzenlenmiştir. Araştırmacılar tema, alt temalar ve alt temalar altında yer alan kategoriler ve bunlar arası ilişkileri tablo kullanarak görsel hale getirmiştir. Son olarak, ortaya çıkan temalar ve temalar arası ilişkiler yorumlanmış ve karşılaştırılmıştır (Miles ve Huberman, 1994). Bulgular öğretmen adaylarının görüşlerinden doğrudan alıntılar yapılarak sunulmuştur.

Bulgular

Bu bölümde, sınıf öğretmenliğinde okuyan öğretmen adaylarının lineer bir şekil örüntüsünü genellerken kullandıkları stratejilere ilişkin bulgular; yakın ve uzak bir adıma devam ettirme ve örüntüyü genelleme (kuralını belirleme) olmak üzere iki aşamada incelenmiş, ancak bir bütün olarak sunulmuştur.

Şekil örüntüsünü devam ettirmede ve örüntünün genellenmesinde öğretmen adaylarından bazılarının sayısal, bazılarının görsel olmak üzere temelde iki yaklaşım benimsedikleri, buna karşın bazı adayların her iki yaklaşımı da kullandığı saptanmıştır. Sayısal yaklaşım, verilen şekil örüntüsünün sayı örüntüsüne dönüştürülmesi ve örüntünün yakın/uzak adımını ve kuralını belirlemede oluşturulan bu sayı örüntüsünün kullanılması şeklinde tanımlanabilir. Öğretmen adayları, verilen şekil örüntüsünü yakın ve uzak bir adıma devam ettirmede ve örüntüyü genellemede sayısal yaklaşım kapsamında da pek çok strateji kullanmışlardır. Bu stratejiler Tablo 1'de verilmiştir.

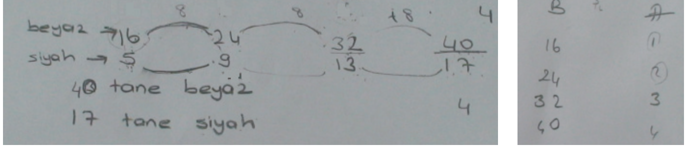
Tablo 1.

Yakın /Uzak Adıma Devam Ettirmede ve Kuralı Belirlemede Kullanılan Sayısal Stratejiler

Yinelemeli (Recursive) Stratejiler

- Terimler arası farkı bulma
- Bir önceki terimden bir sonraki terimi elde etme
- Tahmin ve kontrol
    - ✓ Kat ilişkisi arama
    - ✓ Kuvvet ilişkisi arama
    - ✓ Kat ilişkisini devam ettirme
    - ✓ Terimler arası farkı kat olarak alma
- Aralık sayma
- Bağıntı arama
- Araç örüntü oluşturma

Verilen şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştüren 8 öğretmen adayı, örüntünün yakın adımındaki beyaz ya da siyah kare sayılarını belirlerken ilk olarak terimler arası farka odaklanmış ve 4. adımdaki beyaz ve siyah kare sayılarını bir önceki terimden yararlanarak ($a_n=a_{n-1}+8$, $a_n=a_{n-1}+4$) hesaplamıştır. Aşağıda verilen örüntüyü sayı dizisi ve t- tablosu temsili biçiminde oluşturan, terimler arası farkı belirleyen ve 4. adımdaki kare sayılarını bir önceki terimden yararlanarak bulan adaylardan örnekler verilmiştir.



Şekil 1. Sayı Dizisi ve t-Tablosu Temsilinde Bir Önceki Terimden Yararlanma

Örüntünün yakın adımında bir önceki terime ve terimler arası farka odaklanan öğretmen adaylarının çoğunluğunun uzak adımdaki beyaz ya da siyah kare sayılarını belirlerken ve örüntüleri genellerken ağırlıklı olarak "tahmin ve kontrol" ile "aralık sayma" stratejilerini kullandıkları belirlenmiştir.

"Tahmin ve kontrol" stratejisi, örüntünün ardışık terimleri arasında bir ilişki arama olarak tanımlanabilir. Bu ilişki terimler arasında kat ilişkisi ya da kuvvet ilişkisi olabildiği gibi, terimler arası sabit farkı kat olarak almada da olabilmektedir. Örneğin, siyah ve beyaz kare sayılarına ilişkin sayı örüntülerinin yakın adımını «terimler arasında kat ilişkisi" ya da "terimler arası kuvvet ilişkisi" stratejileri ile belirleyen 2 öğretmen adayından birinin görüşmesi örnek olarak verilebilir.

Görüşmeci(G) *: Peki bu siyah ve beyaz kare sayılarını daha farklı bir şekilde bulabilir miydin?*

Merve *: Mesela birin karesinin 4 fazlası (1. Adımdaki siyah kare sayısı), ama bu küpünün bir fazlası oluyor, karesinin 5 fazlası (2. Adımdaki siyah kare sayısı) ama olmuyor galiba (…)*

G *: Peki hemen nerden buldun 4 katının bir fazlası olduğunu? Yani nasıl fark ettin?*

Merve *: Denedim, acaba önce kareleriyle, küpleriyle orantılı olabilir diye düşündüm, denedim çıkmadı, daha sonra dörtle çarpıp bir fazlasını eklediğimde üçünde de aynı sonucu buldum, deneyerek buldum.*

Bir öğretmen adayının da uzak adımı belirlemede yakın adımda kullandığı tahmin ve kontrol-kat ilişkisi arama stratejisinde kullandığı kat ilişkisini uzak adıma kadar devam ettirdiği de görülmüştür. Aday siyah kare sayılarına ilişkin oluşturduğu 5, 9, 13 … sayı örüntüsünü incelerken 2x**2**+1,2x**4**+1,2x**6**+1 ilişkisini 4. adımda keşfetmiş ve 10. adıma kadar 2, 4, 6, 8… örüntüsünü devam ettirerek "*2 çarpı 20 artı 1' den 41*" sonucuna ulaşmıştır. Öğretmen adaylarının tahmin ve kontrol kapsamındaki stratejileri kullanarak örüntüyü genellerken yakın ve uzak adımda kullandıkları yola benzer davranışlar sergiledikleri görülmüştür. Örneğin bir aday beyaz kare sayılarına ilişkin kuralı şu şekilde ifade etmiştir:

"Aralarında bir kat ilişkisi olması gerektiğini düşündüm. Birer artış (adım sayıları) ve sekize artış olarak (beyaz kare sayıları). Bu yüzden artış farkı 8 olduğu için (…) 8n+8 olması gerektiğini düşündüm. Sonra da ilkinde n yerine birinci adımda 8 yazdığımda 16 olması için kaç gerektiğini, ne eklemem gerektiğini buldum (8), diğerleri de benzer şekilde."

Örüntünün uzak adımını belirlemede kullanılan "aralık sayma" stratejisi ise, örüntünün ilk terimine uzak adıma kadar olan terimler arası sabit farkın çarpılarak eklenmesi şeklinde tanımlanabilir. Bu stratejiye ilişkin öğretmen adaylarının ifadeleri örnek olarak sunulmuştur

G *: 10. Adım için gerekli olan siyah ve beyaz kare sayısını şekil çizmeden bulabilir misin?*

Ayça *: 5,9,13,17,… biraz uzun bir yöntem olurdu ama hepsini işte ekleyerek yapabilirdik. 41 olmalı*

G *: Nasıl buldun 41'i?.*

Ayça *: Yani 5'ten sonra 10. Sayı için 9 tane adım lazım. Aralarındaki fark sabit 4 olduğu için 9 adımla çarptım, 5'i ekledim. İlk sayı 5 olduğu için. Yani 41. (…)*

G *: Peki beyaz kareler için ne söyleyebilirsin?*

Ayça *: 16,24,32,… Beyazlar da işte aynı. 10. Adımda 9 aralık var. Her bir adımda 8 fark olduğu için aralarında, 9 ile 8' i çarptım 72, onu ilk sayıyı ekleyerekten 88. 10. Adımda 88 beyaz kare var.*

Öğretmen adaylarından bazılarının örüntünün kuralını genellerken de bu stratejiyi kullandıkları görülmüştür. Örneğin adaylardan biri siyah kare sayılarını "*siyahları da yine ilk terim, ilk terim 5, 5 artı, dört ile çarpacağım, dört artığı için, dört çarpı adım sayısı eksi bir (5+4(A-1)=S) eşittir siyah*" biçiminde genellemiştir. Öğretmen adaylarından bazılarının da örüntünün uzak adımını belirlerken ve örüntüleri genellerken bir sonraki terim ile bir önceki terim arasında bir bağıntı oluşturma şeklinde tanımlanan "bağıntı arama" ve siyah ya da beyaz kare sayıları arasında ya da adım sayısı (bağımsız) ile terim sayısı (bağımlı) arasındaki farkların bulunması şeklinde Tanışlı ve Özdaş, (2009) tarafından tanımlanan "araç örüntü arama" stratejilerini de kullandıkları belirlenmiştir.

Elde edilen bulgularda dikkati çeken bir nokta da yakın adımda sayısal yaklaşımı kullanmayan öğretmen adaylarının (6) örüntünün uzak adımı sorulduğunda sayısal yaklaşımı kullanmalarıdır. Adayların bu yaklaşım kapsamında ağırlıklı olarak terimler arası farkı bulma, bir önceki terimden bir sonraki terimi elde etme ve aralık sayma stratejilerini tercih ettikleri görülmüştür. Bu adaylardan sadece biri tahmin ve kontrol stratejisini kullanmış, ancak o da uzak adımdaki siyah ve beyaz kare sayıları arasındaki bağıntıya odaklanarak örüntünün uzak adımını belirleyememiştir. Ayrıca bu öğretmen adaylarından 4'ünün beyaz ve siyah kare sayılarını sayısal yaklaşım ile genelleyemedikleri, terimler arası farka odaklanarak x, x+4, x+8 biçiminde $a_n=a_{n-1}+m$ şeklinde yinelemeli yaklaşımı kullanarak kendilerince bir genellemeye ulaştıkları görülmüştür.

Öğretmen adaylarının benimsedikleri diğer bir yaklaşım olan görsel yaklaşım ise, verilen şekil örüntüsünde şeklin yapısal özelliklerinin dikkate alınması ve örüntünün yakın/uzak adımının ve kuralının belirlenmesinde bu yapısal özelliklerinin kullanılması şeklinde tanımlanabilir. Adayların görsel yaklaşım kapsamında yinelemeli stratejilerin yanı sıra bağımsız (adım sayısı) ile bağımlı (terim sayısı) değişkenler arası ilişkinin keşfedildiği fonksiyonel stratejileri kullandıkları görülmüştür. Görsel yaklaşım kapsamında kullanılan tüm stratejiler Tablo 2'de verilmiş, ancak bulgularda öğretmen adaylarının ağırlıklı olarak kullandıkları stratejiler ele alınmıştır.

Tablo 2.

Yakın/Uzak Adıma Devam Ettirmede ve Kuralı Belirlemede Kullanılan Görsel Stratejiler

Siyah kare sayıları	*Beyaz kare sayıları*
Yinelemeli (Recursive) Stratejiler	**Fonksiyonel (Explicit) Stratejiler**
Bir önceki şekle odaklanma	*Değişen karelere odaklanma*
• Bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme	• Parçalı gruplama
	• L gruplama
• Sayısalı görsele adapte etme	• Çerçeve ve kol çerçevesi
Fonksiyonel (Explicit) Stratejiler	*Bütüne odaklanma*
Değişen karelere odaklanma	• Kareye tamamlama
• Görsel gruplama stratejisi	• Kolları gruplayarak siyahları çıkarma
Bütüne odaklanma	• Dikdörtgensel bölgelere ayırma
• Kareye tamamlama	• Yatay dikeylere sabitleri ekleme
• Dikey yatay gruplama	• Bütün karelerden siyahları çıkarma
• Dikdörtgensel bölgelere ayırma	*Görselde sayısaldan yararlanma*
Görselde sayısaldan yararlanma	• Görsel içinde sayısal
• Görsel içinde sayısal	
Yinelemeli (Recursive) Stratejiler	
Bir önceki şekle odaklanma	
• Bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme	

Örüntünün yakın adımındaki siyah ve beyaz kare sayılarını öğretmen adaylarından biri hariç diğer tüm adaylar görsel yaklaşımı kullanarak belirlemişlerdir. Bu adaylardan 6'sı örüntünün 4. adımındaki siyah ve beyaz kare sayılarını bir önceki şekilden yararlanarak şekli çizme yoluyla bulmuşlardır. Şekil çizerek yakın adımı belirleyen öğretmen adaylarından 2'sinin uzak adımdaki siyah ve beyaz kare sayılarını, 2'sinin ise beyaz kare sayısını görsel yaklaşım ile belirleyemedikleri, ayrıca beyaz ve siyah kare sayılarına ilişkin örüntüleri genelleyemedikleri de görülmüştür.

Sayısal yaklaşım kapsamında tahmin ve kontrol stratejilerini kullanarak siyah karelere ilişkin örüntüyü genelleyen öğretmen adaylarının (3) bu genellemeyi şeklin yapısında aradıkları görülmüş ve bu strateji "sayısalı görsele adapte etme" olarak tanımlanmıştır. Örneğin;

G *: Siyah kare sayılarına ait kuralı acaba şekil yardımıyla yapabilir misin?*

Ayça *:Şu artı bir sanırım şurdaki (ortadaki) sabit kare olması gerekiyor diye düşünüyorum. Her birindeki sabit kare +1 olarak geliyor. 4 tane de işte enine boyuna büyürken dört artacağı için dört* *katı oluyor her seferinde.*

G *: O yüzden 4n+1 oldu diyorsun.*

Ayça *: Evet hı hı, daha kolay gördüm bu siyah karelerde.*

G *: Siyah karelerde kuralı daha kolay gördün ama şu kuralı (4n+1) bulduktan sonra*

Ayça *: Görebildim. Başta göremedim bunu(kuralı).*

Örüntünün yakın ve uzak adımındaki siyah karelerin belirlenmesinde görsel yaklaşımı kullanan 15 öğretmen adayından 13'ü, örüntüde her bir adımda değişen siyah karelere odaklanmış ve her bir koldaki siyah kare sayısının adım sayısı ile aynı, ortadaki karenin ise sabit kaldığını ifade ederek fonksiyonel ilişkiyi keşfetmiştir. Becker ve Rivera'nın (2005) araştırmalarında da 9. sınıf öğrencileri tarafından kullanılan bu strateji "görsel gruplama stratejisi" olarak aynı biçimde isimlendirilmiştir. Bir öğretmen adayının yakın adımı belirlemesi, bir öğretmen adayının ise örüntüyü genellemesi sunulmuştur:

G *: 4. Adım için gerekli olan siyah kare sayısı ne olur?*

Mine *: Bir çarpı 4 artı 1. Şimdi burada birer birim var. (1. Adımdaki siyah kareler her kolda) Burada ikişer kare.(2.adımda) Burada üçer kare gitmiş.(3.adımda) Burada 4 tane diye düşündüm. Saydığım zaman 4,4,4,4 bir de ortada var bir tane, 17 oldu.*

Genelleme ise;

G *: Peki şeklin yapısını inceleyerek siyah kare sayıları ile adım sayıları arasında bir kural bulabilir misin?*

Bilal *:Şeklin yapısından şimdi bu işaretin siyah artı işaretin dört kolu var; birincide her kolda bir tane yani 4A bir de ortada var; 4A artı 1 şeklinde yazarsak,bu bana siyah kare sayısını veriyor: 4A artı 1 eşittir S.*

Siyah karelerin belirlenmesinde görsel yaklaşımı kullanan öğretmen adaylarından bazıları değişen karelere odaklanmak yerine şeklin bütününe odaklanarak yakın ve uzak adımı belirlemeye çalışmışlar, ancak kuralın belirlenmesinde bu stratejileri kullanmamışlardır.

Şeklin bütününe odaklanan öğretmen adaylarının 2'sinin yakın ve uzak adımdaki siyah kare sayısını "kareye tamamlama stratejisini" kullanarak belirlemeye çalıştıkları görülmüştür. Kareye tamamlama stratejisi her bir adımda verilen şekillerin kare olacak şekilde tamamlanması ve karenin bir kenarındaki birim kare sayısının adım sayısı ile ilişkilendirilmesidir (fonksiyonel ilişki). Bu strateji ile siyah kare sayılarını belirlemek isteyen 2 aday tamamladıkları karenin içindeki toplam kare sayısından beyaz kare sayılarını çıkarma yoluna gitmiş ancak içlerinden biri sonuca ulaşamamıştır. Adaylardan 2'si ise her bir adımdaki siyah kareleri yatay ve dikey olarak gruplamış, bu grupları toplarken ortak toplanan kareyi çıkarma yoluyla 4. adımı "*Siyahlar artarak devam ediyor. Üç, beş, yedi (yatay olan siyahları saydı) burada da dokuz olacak, dokuzda üst tarafta ortadaki iki defa sayıldığı için dokuz dokuz on sekiz, bir çıkarırız on yedi*" biçiminde belirlemiştir. Bu strateji "yatay dikey gruplama" olarak isimlendirilmiştir.

Öğretmen adaylarının yakın ve uzak adımındaki beyaz kare sayılarını belirlerken ve genelleme yaparken şeklin yapısına bağlı olarak görsel yaklaşım kapsamında Tablo 2'de de verilen çeşitli stratejiler kullandıkları görülmüştür. Adaylar örüntünün 4. ve 10. adımındaki beyaz kare sayılarını ve kuralını çoğunlukla değişen karelere ve bütüne odaklanarak "parçalı gruplama", "L gruplama" ya da "kareye tamamlama" biçimindeki fonksiyonel stratejiler ile belirlemişlerdir.

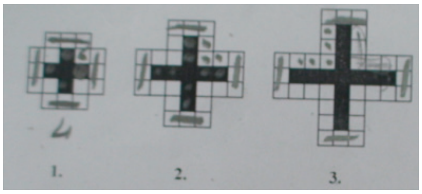
Parçalı gruplama stratejisi kolların en dışındaki üç birimlik beyaz kareler arasında kalan ve her adımda değişen beyaz karelerin adım sayısı ile ilişkilendirilmesidir. Örneğin bu stratejiyi kullanan öğretmen adaylarından biri 10. adımdaki beyaz kare sayılarını belirlerken bir kolda siyah karelerin yanında, arada kalan önce dikey ardından yatay beyaz kareleri toplayarak 4 ile çarpmış ve bu toplama sabit olarak aldığı 12 beyaz kareyi eklemiştir. Örüntünün kuralını ise 4(2A-1)+12=B olarak ifade etmiştir. İzlediği yol;

***Bilal** : Evet. 10. Şekilde de burada 20 kare (Şekil 3'teki yatay koldaki ok), burada 19 (dikey koldaki ok) olacağını düşündüm. Burada yine dört tane (kol) var… dört çarpı 19 bir de şu dışarıdakiler (doğruların dışında kalan sabit beyaz kareler) artı 12, 88. (…)*

***G** : Beyaz kare sayılarına B ve adım sayısına A dersek, B ile A arasında bir kural bulabilir misin?(..)*

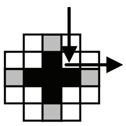
***Bilal** :Bir köşedeki beyaz kareler birincide bir, ikincide üç, üçte beş, dörtte yedi şeklinde gidecek, ardışık 2n eksi 1 diye. Bu şekilde dört tane köşesi var, bu nedenle dört diyorum (4(2A-1) yazdı), bir de şu işaretin (artı işareti) uçlarındakini ele almadığım için onlar hiçbir şekilde değişmiyor artı 12.*

Bu stratejiyi kullanan öğretmen adaylarından bazılarının değişen beyaz karelere odaklanarak Şekil 2'de gösterilen noktalı kareleri 1, 3, 5, 7 sayı örüntüsü ile ifade ettikleri, yakın/uzak adımdaki beyaz kare sayılarını bu sayı örüntüsünden yararlanarak buldukları ve sabit beyaz kareler ile topladıkları da görülmüştür (görsel içinde sayısal). Aşağıda verilen şekilde "parçalı gruplama" ve "görsel içinde sayısal" stratejilerini kullanan bir adayın her bir adımda noktalarla belirtilen beyaz kareleri belirleyerek 4 ile çarptığı ve bu toplama düz çizgilerle belirlediği 12 sabit kareyi eklediği görülmüştür.



Şekil 2. Parçalı Gruplama ve Görsel İçinde Sayısal Stratejileri

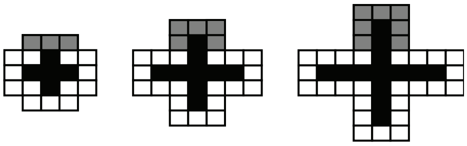
Öğretmen adaylarının kullandıkları bir diğer strateji ise, Becker ve Rivera'nın (2005) araştırmalarında tanımlanan "L'leri sayma ve 4 merkez kareyi ekleme" stratejisidir. Bu araştırmada "L gruplama" olarak isimlendirilen bu strateji, örüntünün birinci adımında beyaz karelerin sayısının bulunmasında siyah karelerin çevresindeki (okla gösterilen) L biçimindeki 3 kareden oluşan 4 grup beyaz karelere her bir kolda ortadaki beyaz karelerin eklenmesi olarak tanımlanmıştır. Bu stratejiyi kullanan adaylardan birinin örüntünün uzak adımını belirlemesi örnek olarak verilebilir;



Şekil 3. L Gruplama Stratejisi

***Fatma** :10. adım içinde şimdi burada (dikey ok) 10 tane, 10 tane de burada (yatay ok) olacak 20, bir tane de fazla olacak 21, 21 ile 4 ü çarpacağım (4 kol için) 84, 84 ile de 4 (gri kareler) ü toplayacağım 88 tane beyaz oldu.*

L gruplama stratejisini kullanan bir diğer öğretmen adayı ise beyaz kare sayılarını *"Burası A kadar (yatay beyazlar), burası A+1 kadar (dikey beyazlar), bunları topluyorum yani 2A artı 1 kadar oluyor, bunu dört ile çarpıp artı dört eklemiş oluyorum"* ifadesiyle 4(2A+1)+4=B olarak genellemiştir. Beyaz kare sayılarının belirlenmesinde 2 öğretmen adayı tarafından kullanılan bir diğer farklı strateji "çerçeve" olarak isimlendirilen, her bir koldaki siyah kareleri çevreleyen beyaz karelerin toplanarak 4 ile çarpıldığı ve bu toplama içteki 3x3'lük karedeki 4 sabit beyaz kare eklendiği bir stratejidir.



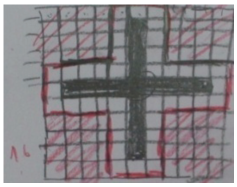
Şekil 4. Çerçeve Stratejisi

Cüneyt : *Her birinde sadece bu şekle ait olan (gri kareler), bunda (1. adımda) 3 tane var. Bunda (2. adımda) 5 tane var. Bunda (3. adımda) 7 tane var. Şimdi bu dördü için de 3x4 dedim, daha doğrusu 4x3 dört tarafı olduğu için. Artı 4 dedim birinci şey için bu da zaten 16'yı veriyor. İkinci için burası 5' ti 4x5+4 , 24 oluyor. Üçüncü için 7 tane vardı ortak olmayan 4x7+4 bu da 32 oldu.(…)*

G : *Peki şimdi beyaz kare sayısına B diyelim. Örüntünün adım sayısına da A diyelim. Şimdi B ile A arasında nasıl bir kural var?*

Cüneyt : *Bu şekilde 3, 5, 7 diye sistematik bir artışı var. 3. Adımda 2n+1' de 7 tane sadece buna (bir kola) ait olan beyaz kare olduğuna göre A. adımda da 2A+1 olur. Sadece tek taraf için, bu 4 tarafta da olduğu için 4 ile çarparız bunu, her birinde de 4 tane ortak olduğu için artı 4 ile toplayabiliriz.*

Öğretmen adaylarının görsel yaklaşım kapsamında tercih ettikleri bir diğer strateji şeklin bütününe odaklanarak kullandıkları kareye tamamlama stratejisidir. Ancak bu stratejiyi kullanan 4 öğretmen adayından ikisinin tamamladıkları karenin bir kenarındaki birim kare sayısını adım sayısı ile ilişkilendiremedikleri, diğer bir değişle fonksiyonel ilişkiyi keşfedemedikleri, bu nedenle ne uzak adımı ne de kuralı belirleyemedikleri görülmüştür. Bazı öğretmen adaylarının ise karenin bir kenarındaki birim kare sayısını belirlemek için yinelemeli (recursive) bir yaklaşımla 5x5, 7x7, 9x9 örüntüsünü 10. adıma kadar devam ettirdiği ve 23x23' lük kareyi oluşturduğu saptanmıştır. Bu stratejiyi örüntünün uzak adımında kullanan bir öğretmen adayının görüşmesi örnek olarak verilmiştir:



Şekil 5. Kareye Tamamlama Stratejisi

G : *Peki 10. adımda kaç tane beyaz ve siyah kare vardır?*

Songül : *Ben yine şeklin tamamından bir genellemeye çıkarım diye düşünürüm…ilkönce birinci şekli tamamlarsam (1. adımdaki şekli kareye tamamladı) beş kare olur burada (bir kenardaki birim kare sayısı) yedi kare burada (2. adım) dokuzda burada var (3. adım)… o zaman ben bunu tek tek yazar, 1. 2.…. 10. adım diye işimi garantiye alırım böyle 5, 7, 9…, 23. 10. adımda 23 kare var; o zaman şimdi 23' ün karesini alacağım, 529 tane kare varmış ee.. şimdi 1. adımda bire birlik kare, 2. adımda ikiye ikilik, 10. adımda ona onluk bir kare olacak; o zaman 400 taneyi 529' dan çıkarırsak 129 tane (…) [129] verilen şekildeki tüm kareler, az önce siyah kareleri de bulmuştum(…) 10. adımda 41 tane siyah kare var (…), beyaz kareleri bulmak için de çıkartırım (129-41=88 yazdı) 88 tane beyaz kare var, 41 tane siyah kare var.*

Öğretmen adaylarından 1'i beyaz karelerin belirlenmesinde "kolları gruplayarak siyahları çıkarma" olarak isimlendirilen farklı bir strateji kullanmıştır. Bu strateji bir koldaki beyaz kare sayılarından siyah kare sayıları çıkarılarak 4 ile çarpılması ve bu sonuca içteki 3x3'lük karedeki 4 sabit beyaz karenin eklenmesi olarak tanımlanabilir. Adayın "*10. adımda 3x10, 30 tane kare var bir kolda, 10. adımda dokuz tane siyah kare geleceği için 30 eksi 9, 21 tane beyaz kare var, dört tane kol olduğu için 21 çarpı 4, 84 tane kollarda beyaz kare var, içerde de 4 tane sabitti 84 artı 4, 88 tane beyaz*" ifadeleri örnek olarak verilebilir. Örnekten de görüldüğü gibi adayın hem siyah hem de beyaz kare sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirerek uzak adımı belirlediği ve 4(3A-(A-1))+4=B olarak genellediği görülmüştür. Öğretmen adaylarından bazılarının ise "dikdörtgensel bölgelere ayırma","bütün karelerden siyah kareleri çıkarma","kol çerçevesi" şeklinde tanımlanan görsel stratejileri kullanmaya çalıştıkları ancak yakın, uzak ya da kuralı bu stratejiler ile belirleyemedikleri görülmüştür.

Öğretmen adayları tarafından kullanılan görsel stratejiler ele alındığında, adayların yakın/uzak adımı bulmada ya da örüntüyü genellemede kullandıkları stratejileri devam ettirdikleri ya da değiştirerek farklı stratejiler kullandıkları da elde edilen bulgular arasındadır.

Tartışma

Bu çalışmada öğretmen adayları lineer şekil örüntüsünü genelleme sürecinde temelde görsel ve sayısal olmak üzere iki yaklaşım benimsemişlerdir (Stacey, 1989; Garcia-Cruz ve Martinon, 1997; Rivera ve Becker, 2003, 2005; Becker ve Rivera, 2005, 2006, Rivera, 2007). Ayrıca kimi öğretmen adayları da örüntüyü genelleme sürecinde bazı araştırmalarda harmonik (Krutetskii, 1976; Akt, Barbosa, Palhares ve Vale, 2007) ya da pragmatik (Becker ve Rivera, 2005) şeklinde tanımlanan hem görsel hem de sayısal yaklaşımı bir arada kullanmışlardır.

Örüntüleri genelleme sürecinde adaylar sayısal yaklaşım altında sadece terimler arası ilişkinin araştırıldığı yinelemeli, görsel yaklaşım altında ise hem yinelemeli hem de değişkenler arası ilişkinin araştırıldığı fonksiyonel stratejileri kullanmışlardır (Stacey, 1989; Samsan, Linchevski ve Olivier, 1999; Lannin, 2005; Ley, 2005; Carraher ve diğerleri, 2008; Amit ve Neria, 2008). Sayısal yaklaşım altında sadece yinelemeli stratejilerin kullanılması şaşırtıcı bir durum değildir. Çünkü adayların geçmiş deneyimlerinde lineer sayı dizilerinin (aritmetik diziler) genel kurallarının elde edilmesinde terimler arası sabit farka odaklanarak cebirsel yöntemleri kullanmaları bu durumu açıklayabilir (Rivera ve Becker, 2005). Ayrıca öğretmen adaylarının terimler arası sabit farka odaklanmaları da örüntünün genellenmesinde sayısal bir ipucu olarak görülebilir. Görsel yaklaşım kapsamında öğretmen adaylarının bazıları sayısal yaklaşımda olduğu gibi görsel ipucu olarak bir önceki şekle (yinelemeli stratejiler), bazıları ise sayısal yaklaşımdan farklı olarak şekillerdeki değişen karelere odaklanarak bu kareleri adım sayıları ile ilişkilendirmişlerdir (fonksiyonel stratejiler) (Rivera, 2007).

Fonksiyonel stratejileri kullanan adaylar şeklin yapısındaki değişen ve değişmeyen özellikler ve ilişkiler yoluyla örüntüyü genelleyebilmişler ve genellemelerini de savunmuşlardır. Buna karşın sayısal stratejiler ile geneleme yapan adayların bazıları örüntüyü görememişler, bağımlı ve bağımsız değişkenler arası ilişkilendirme yapamamışlardır. Bazı adaylar ise sayısal stratejilerle genellemeye ulaştıklar için görsel stratejileri kullanmamışlardır. Bu noktada Rivera ve Becker'ın (2005)ilköğretim ve ortaöğretim öğretmenleri üzerinde gerçekleştirdikleri araştırma sonucunda da ifade ettikleri gibi, şekilsel genelleme yapan öğretmenlerin kullandıkları sayısal stratejilere göre daha anlamlı bir kavrama gücüne sahip oldukları ve sayısal genelleme yapanların sıklıkla örüntüleri görmede ve oluşturdukları kuralları savunmada yetersiz oldukları söylenebilir.

Araştırmada lineer şekil örüntülerini genelleme sürecinde şeklin yapısının önemli bir rolü olduğu da dikkati çekmiştir. Adayların özellikle tamamına yakını siyah kare sayılarına ilişkin genellemeyi şeklin yapısından fark ederek lineer örüntülerin genel formunu diğer bir değişle kapalı formunu ($y=mx+n$) elde etmeleri bu sonucu doğurmuştur. Verilen şekil örüntüsünde siyah karelerin artarak büyümesi beyazlara oranla daha belirgindir. Bu durum adayların siyah karelere ilişkin daha kolay genelleme yapmasını sağlamıştır. Beyaz karelerdeki değişim ise öğrencilerin bakış açılarını çeşitlendirmiş ve böylece adaylar farklı stratejiler kullanarak genelleme yapmışlardır. Diğer taraftan farklı stratejilerle örüntüyü genelleyen adaylar beyaz karelere ilişkin kapalı formun dışında birden fazla farklı kural da elde etmişlerdir (Rivera, 2007). Ancak adayların bazılarının elde ettikleri bu kuralların eşitliğini görememeleri de araştırmanın çarpıcı sonuçlarından birisidir. Bu durum öğretmen adaylarının eşitlik kavramına ilişkin eksikliklerinin bir göstergesidir.

Araştırmada ne sayısal ne de görsel yaklaşım ile genellemeye ulaşamayan adaylara da (2) rastlanmıştır. Bu adayların sadece örüntünün terimler arası sabit farkına odaklanmaları genelleme yapamamalarına yol açmıştır. Örneğin adaylar $a_n=a_{n-1}+8$ şeklindeki yinelemeli yaklaşıma dayalı olarak beyaz kare sayılarına ilişkin x, x+8, x+16 biçimindeki kuralın yeterli olduğunu belirtmişlerdir (Rivera, 2007; Rivera ve Becker 2005; Stacey ve Macgregor, 2000). Ayrıca adaylardan siyah ve beyaz kare sayılarının genellenmesinde A (adım), S (siyah) ve B (beyaz) harfli ifadeleri kullanmaları istenmiş, ancak bazı adaylar x ve n gibi harfli ifadeleri kullanmayı tercih etmişlerdir. Bu durum adayların geçmiş deneyimlerinde x ve n gibi harfli ifadeleri sıklıkla kullandıkları izlenimini vermektedir. Bazı adaylar ise, adım sayısının ne olduğunu sorarak adım sayısı ile kare sayıları arasındaki ilişkiyi veren cebirsel ifadeyi yazmada zorlanmışlardır (Stacey ve Macgregor, 2000). Bu durum da öğretmen adaylarının değişken ve cebirsel ifade kavramlarında eksikliklerinin olduğunun bir göstergesi olarak görülebilir.

Sonuç

Sonuç olarak araştırmada kullanılan lineer şekil örüntüsünü genelleme sürecinde, örüntünün görülmesi, değişkenlerin ilişkilendirilmesi yani fonksiyonel ilişkinin keşfedilmesi, aynı örüntü için sayısal stratejilerle elde edilmesi uğraştırıcı olan çeşitli formüllerin üretilmesi ve savunulmasında görsel stratejilerin önemli bir rolü olduğu söylenebilir. Dolayısıyla bu araştırma ve alanyazındaki benzer araştırma sonuçlarına dayanarak cebirdeki görselleştirmenin akıl yürütme, problem çözme, ilişkilendirme, kanıtlama becerilerinin kullanımı ve gelişiminde, değişkenlerin kullanımını gerektiren ilişkilerin ve yapıların anlaşılmasında alternatif bir yol sağladığı sonucu da çıkarılabilir. Bu bağlamda öğrencilerin görselleştirme aracılığıyla şekil örüntülerindeki görsel ipuçlarını fark edebilmeleri ve şekilden cebirsel yapıyı görebilmeleri ve bu yapıyı genellemelerinin geliştirilmesi gereklidir. Bu gereklilik cebirsel düşünmenin gelişiminde önemli bir bileşendir.

Lineer şekil örüntüsünü genelleme sürecinde sayısal yaklaşım altında ağırlıklı olarak kullanılan aralık sayma stratejisinde terimler arası sabit farkın önemli bir rolü olduğu görülmüştür. Genelleme sürecinde her ne kadar terimler arası sabit fark sayısal bir ipucu olarak ele alınsa da bu stratejinin üst düzey matematiksel kavramların anlaşılmasında önemli bir boyut olan fonksiyonel ilişki becerisinin kazanımında sınırlılık yaratabileceği düşünülebilir.

Öğrencilerin cebirsel düşünme gelişimleri göz önüne alındığında ise, bu öğrencileri yetiştirecek olan özellikle sınıf öğretmeni adaylarının eğitimi ön plana çıkmaktadır. Böylece sınıf öğretmeni adaylarının bu konuya ilişkin alan bilgilerinin sorgulanması ve aynı zamanda pedagojik alan bilgilerinin güçlendirilmesi önemlidir. Bu önem doğrultusunda Sınıf Öğretmenliği Programında yer alan Matematik Öğretimi ve Temel Matematik derslerinde lineer ya da diğer örüntülerin genellenmesi gibi konulara detaylı yer verilmesi önerilebilir.

Kaynakça

Amit, M.,& Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM,* 40, 111-129.

Barbosa, A., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Patterns and generalization: the influence of visual strategies. In D. Pitta – Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* 6, 844-851. Larnaca, Cyprus.

Becker, J.R. & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H.L. Chick& J.L. Vincent (Eds.), *Proceeding of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 4, 121-128. Melbourne: PME.

Becker, J. R. & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra (1). In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Saiz & A. Mendez (Eds.), *Proceeding* *of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* 2, 95-101. Merida, Mexico: Universidad Pedagogica Nacional.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1998). *Qualitative research for education: An ıntroduction to theory and methods (*3rd Ed.). Boston: Allyn and Bacon.

Carraher, D.W., Martinez, M.V. & Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education,* 40, 3-22.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 547-589). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. & Threlfall, J. (1998). Children's strategies with number patterns. *Educational Studies***,** 24(3), 315-331.

Garcia-Cruz, J.A. & Martinon, A. (1997). Actions and invariant schemata in linear generalizing problems. In E. Pehkonen (Ed.) *Proceeding of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* 2, 289-296. Universty of Helsinki.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The chalenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning,* 7(3), 231-258.

Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding?. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 299-317.

Ley, A. F. (2005). A cross-sectional investigation of elementary school student's ability to work with linear generalizing patterns: The impact of format and age on accuracy and strategy choice. Masters Abstract International, 44 (02), 124. (UMI No: AAT MR07303).

Lesley, L. & Freiman, V. (2004). Tracking primary students' understanding of patterns. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* 2, 415–422. Bergen, Norway.

Merriam, S. B. (1998). Qualitative research and case study applications in education. 1st ed-San Francisso: Jossey-Bass.

Miles M. & Huberman, M. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis* (2nd Ed.). California: Sage Publications.

NCTM (2000). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. [Online]: Retrieved on 14-Septembre-2005, at URL: www.nctm.org/standards.html

Olkun, S. & Yeşildere, S. (2007). *Sınıf Öğretmeni Adayları İçin Temel Matematik 1.* Ankara: Maya Akademi.

Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104-120). London and New York: Cassell.

Rivera, F. & Becker, J.R. (2003). The effects of figural and numerical cues on the induction processes of preservice elementary teachers. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the Meeting PME and PMENA* (Vol. 4, 63-70). Honolulu, HA: University of Hawaii.

Rivera, F. & Becker, J.R. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics Teaching In The Mıddle School,* 11(4), 198-203.

Rivera, F. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: understanding figural generalization. *Mathematics Teacher,* 101(1), 69-75.

Samsan, M. C., Linchevski, L. & Olivier, A. (1999). The influence of different representations on children's generalisation thinking processes. *Proceedings of the Seventh Annual Conference of the Southern African Association for research in Mathematics and Science Education. Harare,* *Zimbabwe*. 406-415.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics.* 20, 147-164.

Stacey, K. & Macgregor, M. (2000). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 141-154). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

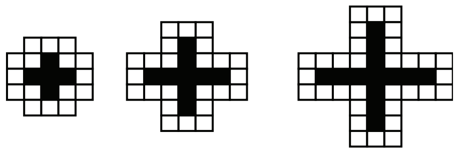
Tanışlı, D. & Özdaş, A. (2009). İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Örüntüleri Genellemede Kullandıkları Stratejiler. *Educational Sciences: Theory & Practice,* 9(3), 1453-1497.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.). *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp.18-30). London and New York: Cassell.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2003). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri.* Ankara: Sözkesen Matbaacılık.

Zaskis, R. & Liljedahil, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics,* 49, 379-402.

EK 1- GÖREV



1 2 3

- Yukarıdaki şekilleri inceleyiniz. 4. adım için gerekli olan siyah ve beyaz kare sayısını belirleyiniz.
- 10. adım için gerekli olan siyah ve beyaz kare sayısını şekil çizmeden bulunuz.
- Beyaz kare sayılarına B ve örüntünün adım sayısına A diyelim. B ile A arasındaki kuralı bulunuz.
- Siyah kare sayılarına S ve örüntünün adım sayısına A diyelim. S ile A arasındaki kuralı bulunuz.