Eğitim ve Bilim
2008, Cilt 33, Sayı 148

Education and Science
2008, Vol. 33, No 148

Farklı Öğrenim Seviyesindeki Öğrencilerin Aritmetikten Cebire Geçiş Düzeylerinin Karşılaştırılması: Denklem Örneği

A Comparision of Different Grade Students' Transition Levels from Arithmetic to Algebra: A Case for 'Equation' Subject

Ramazan GÜRBÜZ* Yaşar AKKAN**
Karadeniz Teknik Üniversitesi

Öz

Öğrencilerin ilköğretimin ikinci kademesi ile birlikte soyutlaşan matematiği kavrayabilmelerinde, aritmetikten cebire geçiş önem arz etmektedir. Bu çalışmanın amacı, farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin denklem konusunda belirlenen problemlere ilişkin çözüm stratejilerini değerlendirerek aritmetikten cebire geçiş düzeylerini karşılaştırmaktır. Bu amaçla, ilk olarak, literatür desteği ile çalışmada kullanılan problemlerin çözüm stratejilerine ilişkin kategoriler belirlendi. Daha sonra öğrencilerin problemlere ilişkin kullandıkları çözüm stratejileri değerlendirilerek, aritmetikten cebire geçişin hangi seviyesinde olduklarına karar verildi. Örnek olay metodolojisiyle yürütülen çalışma, 2006-2007 güz döneminde Doğu Karadeniz Bölgesi'ndeki bir ilçeye bağlı iki ilköğretim okulunda yapılmıştır. Araştırma, her biri 60 öğrenciden oluşan 5., 6., 7. ve 8. sınıfta öğrenim gören toplam 240 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Araştırma sonucunda, öğrencilerin öğrenim seviyesi arttıkça aritmetikten cebire geçişin olumlu yönde geliştiği ancak öğrenme ortamlarında kullanılan sınırlı çözüm stratejilerinden dolayı hiçbir öğrenim seviyesinde beklenen geçişin gerçekleşmediği saptanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Aritmetikten cebire geçiş, geçiş düzeyi, denklem, problem çözme

Abstract

In understanding mathematics which gets more abstract with grades, transition from arithmetic to algebra plays an important role for elementary school students. The aim of this study is to compare the transition levels from arithmetic to algebra for students at different grades by evaluating their problem solving strategies related to the determined problems on 'equation' subject. With this aim, categories of solution strategies of problems used in this study were firstly defined by help of the related literature. Then, by evaluating students' use of the solution strategies associated with problems, their transition levels from arithmetic to algebra were decided. Within a case study research methodology, the study was carried out with two cohort schools in a district of the Eastern Karadeniz Region of Turkey in the fall semester of 2006-2007. The sample consists of totally 240 students drawn from Grade 5, Grade 6, Grade 7 and Grade 8 whose distributions are equal (60 students for each grade). As a consequence, it was elicited that there was positive tendency for transition level from arithmetic to algebra with an increase in student grade. However, because of the limited solution strategies used in learning environments, it was drawn out that none of the grades showed the expected transition.

Keywords: Transition from Arithmetic to Algebra, Transition Level, Equation, Problem Solving

* Arş. Görv. Ramazan GÜRBÜZ, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, Matematik Eğitimi, ABD.

** Arş. Görv. Yaşar AKKAN, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, Matematik Eğitimi, ABD.

Summary

Since mathematical concepts link with each other alike shackle of chain, possible breaking off on this link may cause difficulty in further learning (Swadener and Soedjadi, 1988). To make mathematical concepts as concrete as possible for primary school students not only leads to meaningful learning but also to facilitate to learn further mathematical concepts. If meaningful learning occurs at the targeted level, arithmetic and algebra knowledge needed to solve the encountered problems in both daily life and the other disciplines can be used properly, thereby, transition process from arithmetic to algebra may be achieved in an appropriate way. Generally the arithmetic which is described as a process incorporating in four essential operations, tries to find out what is unknown by means of known ones (Mason, 1996). Also, whilst pre-algebra is defined as a process that gives students with a chance to comprehend algebraic concepts and procedures on the basis of their existing arithmetic and geometrical knowledge (Kieran and Chaloug, 1993), algebra is seen as calculation science (Sfard, 1995).

As a result of studies on algebra and algebraic instruction, NTCM declared two important standards. These standards define algebra as: "Upper primary school mathematics curriculum is a bridge between lower primary school and high school mathematics curricula. The most important transition between these levels is from arithmetic to algebra. For this reason, students at grades 5-8 acquire informally algebraic concepts that are central for abstract algebra they will introduce later …" (NCTM, 1989, pp.102).

Although transition from arithmetic to algebra is an important issue to understand mathematics that becomes abstract with an increase in schooling levels, in our country, as in case of the others, it is not accomplished adequately because of some various reasons. Especially there may be several reasons about why this transition in 'equation' topic is not accomplished. For example, some difficulties are as follows: transformation of word problems into equations (Filloy and Rojana, 1989; Bernardo and Okagaki, 1994; Licnhevski and Hersovics, 1996), mathematical explanation of letters or different notation shapes, (Kieran, 1989;1992), transition from arithmetical rules to algebraic ones, comprehension 'equality' and 'variable' concepts (Usikin, 1988; Falkner, Levi and Carpenter, 1999). In this context the aim of this study is to compare the transition levels from arithmetic to algebra for students at different grades by evaluating their problem solving strategies related to the determined problems on 'equation' subject. Within this aim, sub-problems presented in the following are investigated:

1. Is there any relationship between students' transition levels from arithmetic to algebra and problem types?
2. Is there any relationship between students' transition levels from arithmetic to algebra and their grades?

Within case study research methodology, the study was carried out with two cohort schools in a district of the Eastern Karadeniz Region of Turkey in the fall semester of 2006-2007. The sample consists of totally 240 students drawn from grades 5 to 8 with equal sizes (60 students for each grade).

To collect data, a questionnaire comprising of two questions: whereas one is word problem which is designed based on the related literature, the other is iconic problem. Those problems which can be exploited for all strategies or improved for new strategies that students at different grades can produce solutions were selected and prepared meticulously. To evaluate solution strategies used for these problems, some criteria were emerged by help of the related literature. These criteria consist of four principal strategies – algebraic, pre-algebraic, arithmetical and other strategies—and their indicators. In analyzing data, taking into account

these criteria, students' used strategies for the problems were assessed and then decided the degree to which their transition levels from arithmetic to algebra are.

To address the sub-problems, the students' solution strategies for each grade are inputted into tables and later interpreted. Further, solution strategies of three students for each grade and the reasons why these solutions were labeled under the related strategies are depicted immediately after each related table.

As a result of this study, it was elicited that students' transition levels from arithmetic to algebra showed a positive tendency with an increase in their grades. However, because of limited strategies we used, none of the students under investigation achieved the expected transition.

When we look at the solution strategies used by students at each grade, we see that students have a better understanding in reconstructing word problem and in yielding solution way than iconic problem and the related solution ones. This outcome is in a harmony with that of Sfard (1987).

The paper points out some reasons on why students have difficulty in transition (transiting) from arithmetic to algebra: students lack of (a) arithmetic operation knowledge (b) symbolizing and modeling problem issue and (c) the idea how 'variable' concept can be used in various situations.

Not referring different problem types and solution strategies may be another reason that makes transition from arithmetic to algebra difficult.

Linking historical development of algebra with transition from arithmetic to algebra may facilitate students' transitions from arithmetic to algebra. If a teacher knows these processes, he/she knows steps that his/her students track in transition from arithmetic to algebra and the difficulties his/her students encountered, hence, he/she can facilitate this transition process by devising learning activities.

Algebraic thinking possesses a crucial role in addressing mathematical ideas, developing mathematical reasoning and comprehending further mathematics topics. For this reason, activities that facilitate transition from arithmetic to algebra should be improved and then their effectiveness should be investigated.

Referring the different problem types and solution strategies in learning environment not only affords students to develop their own solutions but also expedite their transition from arithmetic to algebra.

Giriş

Matematiksel kavramlar bir zincirin halkası gibi birbirleriyle bağlantılı olduğundan, bu halkada olabilecek kopmaların ileri matematiksel kavramların öğreniminde zorluklara yol açabileceği bilinmektedir (Swadener ve Soedjadi, 1998). Matematiksel kavramların özellikle ilköğretimin birinci kademesindeki öğrencilere olabildiğince somutlaştırılmış bir şekilde verilmesi, hem anlamlı öğrenmenin gerçekleşmesini hem de ileri matematiksel kavramların öğrenilmesini kolaylaştıracaktır. Bu istenen düzeyde gerçekleştirilebilirse, günlük olaylarda ve diğer disiplinlerde karşılaşılan problemlerin çözümlerinde ihtiyaç duyduğumuz aritmetik ve cebir bilgisi doğru kullanılmış ve aritmetikten cebire geçiş süreci sağlıklı bir şekilde sağlanmış olacaktır.

Aritmetik; sayıları, sayılar arası ilişkileri, sayılarda dört işlemi ve dört işleme dayalı diğer hesaplamaları içermektedir (NCTM, 1991). Bir diğer tanıma göre ise aritmetik, dört temel işlemi kullanarak bilinenden bilinmeyeni bulmak için yapılan işlemlerdir (Mason, 1996). Literatürde, aritmetiğin temelini sayı kavramının oluşturduğuna ve cebirin ise kökünü aritmetikten aldığına dair birçok araştırmaya rastlamak mümkündür (Booth, 1988; Kieran, 1992; Hersovics ve

Linchevski, 1994; Cooper, Boulton-Lewis, Athew, Willss ve Mutch, 1997; Van Amerom, 2002). Aritmetikten cebire geçiş sürecinde ara geçiş olarak cebir öncesi (pre-cebir) kavramı kullanılmaktadır. Aritmetikle cebir arasında köprü vazifesi gören cebir öncesi kavramı, öğrencilerin mevcut aritmetik ve geometrik bilgilerini kullanmalarına imkân tanıyarak cebirsel kavramları ve prosedürleri informal olarak anlamlandırmalarına fırsatlar sağlayabilmesi sürecidir (Kieran ve Chaloug, 1993). Van Amerom'a (2002) göre ise cebir öncesi, aritmetik bir ortamda cebirsel akıl yürütmeyi, formal olmayan sembolleştirmeyi ve denklem çözümünde ihtiyaç duyulan aritmetiksel temelleri genişletmeyi ve güçlendirmeyi içermektedir.

Cebir için literatürde birçok tanım vardır: Kieran (1992) cebirin, genel sayı ilişkilerini ve özelliklerini gösteren, polinom ve denklem çözümleri gibi konuları sembolize eden matematiğin bir branşı olduğunu ve sadece harf sembolleriyle nicelikleri ve sayıları temsil eden değil, aynı zamanda bu sembollerle hesap da yapabilen bir araç olduğunu belirtmiştir. Sutherland ve Rojano'a (1993) göre ise cebir, matematikteki veya başka disiplinlerdeki fikirleri açıklamak için kullanılan bir matematik dilidir. Sfard (1995), cebiri genel hesaplama bilimi olarak tanımlamıştır. Cebir için Usiskin (1997), "Cebir matematiğin dilidir. Bu dil bilinmeyenler, formüller, örüntüler, yer tutucular ve ilişkiler olmak üzere beş ana bileşenden oluşur" demiştir (s.5). Vance (1998) cebiri, genelleştirilmiş aritmetik veya aritmetiği genelleştirmek için gerekli bir dil olarak tanımlamıştır.

Cebirsel düşünme, aritmetiksel bir dille cebirsel işlemlere ve sembollere anlam yükleyerek zihinde var olan cebirsel bilginin sınırları doğrultusunda matematiksel muhakemenin gelişimini içerir (Kieran ve Chaloug, 1993). NCTM'e (2000) göre ise cebirsel düşünme; fonksiyonları anlamayı, cebirsel sembolleri kullanarak matematiksel yapı ve durumları farklı şekillerde temsil ve analiz etmeyi, nicel ilişkileri temsil etmek ve anlamak için matematiksel modeller kullanmayı, gerçek yaşamla ilgili çeşitli durumlardaki değişimi analiz etmeyi gerektirir.

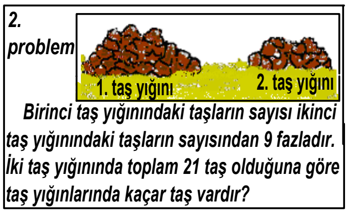
1989 ve 1991 tarihleri arasında cebir ve cebir öğretimi üzerine yapılan araştırmalar sonunda NCTM iki önemli standart yayımlamıştır: Bu standartlarda cebir şöyle tanımlanmaktadır: "İlköğretim ikinci kademe matematik müfredatı, somut ilköğretim birinci kademe matematik müfredatı ile soyut lise matematik müfredatı arasındaki bir köprüdür. Burada en önemli geçişlerden biri aritmetik ile cebir arasındaki geçiştir. Bu nedenle 5-8. sınıflarda öğrenciler, daha sonra çalışacakları soyut cebir için bir temel oluşturabilecek cebirsel kavramları formal olmayan bir yolla alırlar…" (NCTM,1989, s.102).

Aritmetik ile cebir arasında anlamlı ilişki olduğuna dair birçok çalışma vardır: Wagner'e (1983) göre, öğrencilerin cebirsel işlemleri (yapılar) anlamakta zorlanmalarının nedeni, aritmetiğin temel kavramı olan sayı kavramını iyi bir şekilde kavrayamamalarından kaynaklanmaktadır. Booth (1988) ve Kieran (1992), öğrencilerin cebirle ilgili fikirlerini aritmetikle ilgili daha önceki deneyimlerinden yola çıkarak yapılandırdıklarını ifade etmişlerdir. Cooper, Boulton-Lewis, Athew, Willss ve Mutch (1997) ise, aritmetikteki çeşitli yapısal ve ilişkisel gösterimleri anlamadaki eksikliklerin, öğrencileri cebirsel düşünmeyi destekleyen yapılandırmalardan uzaklaştırdığını ve onların cebirde zorluk çekmelerine neden olduğunu belirtmişlerdir.

Aritmetik ile cebir arasındaki geçişi içeren çalışmalar arasında sözel problemler ve lineer denklemler konusu önemli bir yere sahiptir. Sfard (1987) yaptığı araştırmada öğrencilerin, sözlü olarak verilen denklemleri yapılandırmada ve çözüm yolları üretmede, sembolik denklemleri yapılandırmaya ve bu yapıya bağlı olarak çözümler üretmeye kıyasla daha iyi olduklarını belirtmiştir. Kieran (1992) da öğrencilerin verilen cebirsel bir denklemle ilgili işlemleri doğru bir şekilde çözdüklerini, ancak aynı öğrencilerin sözel problemlerdeki ilişkilerden elde edilecek denklemi kurmada zorlandıklarını ifade etmiştir. Hersovics ve Linchevski (1994) yaptıkları araştırmayla bir bilinmeyenli lineer denklemlerin çözümlerinde bilinmeyenle işlem yapan öğrencilerin yetersizlikleriyle ilgili bir bilişsel boşluğun varlığına işaret etmişlerdir. Bu çalışmalar dikkate alındığında, araştırmalara konu olan çalışma gruplarının her birinin bilgi yapılanmalarının farklılık arz ettiği anlaşılmaktadır. Bilginin yapılanma şekli, aynı kazanıma yönelik, ancak farklı şekillerde ifade edilen problemlerin çözümünde ortaya çıkmaktadır.

Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı Eğitim Araştırma ve Geliştirme Daire Başkanlığı (EARGED) yaptığı değerlendirmede, bazı öğrencilerin birinci dereceden cebirsel sözel ifadeler içeren problemleri, aritmetik işlemler kullanarak çözdükleri, ancak birinci dereceden denklemlerin çözümlerini bulamadıkları ve cebirsel ifadeleri anlamakta belirli zorluklara sahip oldukları ifade edilmiştir (EARGED, 1996).

Aritmetikten cebire geçiş, öğrenim düzeyi arttıkça soyutlaşan matematiği anlamada önemli olmasına karşın, yabancı ülkelerin birçoğunda olduğu gibi ülkemizde de çeşitli nedenlerden dolayı etkin bir şekilde sağlanamamaktadır. Özellikle denklem konusuyla ilgili bu geçişin sağlanamamasının birçok nedeni olabilir. Örneğin, sözel problemleri denklemlere dönüştürmedeki zorluklar (Filloy ve Rojana, 1989; Bernardo ve Okagaki, 1994; Linchevski ve Hersovics, 1996), harfleri veya çeşitli gösterim şekillerini matematiksel anlamlandırmadaki zorluklar (Kieran, 1989; 1992), aritmetiksel kurallardan cebirsel kurallara geçişteki zorluklar, eşitlik ve değişken kavramının anlaşılmasındaki zorluklar (Usiskin,1988; Falkner, Levi ve Carpenter, 1999) bu sebeplerden birkaçıdır. Aritmetikten cebire geçişi sağlayan önemli konulardan biri de denklemlerdir. Bu çalışmanın temel amacı; farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin denklem konusunda belirlenen problemlere ilişkin çözüm stratejilerini değerlendirerek aritmetikten cebire geçiş düzeylerini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki alt problemlere cevap aranmıştır:



1. Her bir öğrenim seviyesindeki öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş düzeylerinin kullanılan problem tipiyle ilişkisi var mıdır?
2. Öğrencilerin aritmetikten cebire geçişleriyle öğrenim düzeyleri arasında bir ilişki var mıdır?

Yöntem

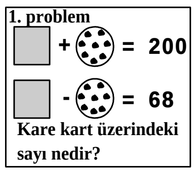
Bu çalışmada, belirlenmiş bir özel durum etrafında derinlemesine inceleme imkânı sağlayan örnek olay metodolojisi kullanılmıştır.

Örneklem

Bu çalışmanın örneklemini, Doğu Karadeniz Bölgesi'ndeki bir ilçeye bağlı iki ilköğretim okulunun 5., 6., 7. ve 8. sınıflarında öğrenim gören toplam 240 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırma, her biri 60 öğrenciden oluşan beşinci, altıncı, yedinci ve sekizinci sınıfta öğrenim gören öğrencilerle gerçekleştirilmiştir.

Veri Toplama Aracı

Bu çalışmanın veri toplama aracı, Van Amerom (2002)'dan 1. problem alınarak ve araştırmacılar tarafından aynı paralelde 2. problem hazırlanarak aşağıdaki iki problemden oluşturulmuştur. Bu problemler, tüm stratejilerin işe koşulabileceği hatta yeni stratejilerin geliştirebileceği ve farklı seviyelerdeki öğrencilerin çözümler üretebileceği şekilde olmasına özen gösterilerek seçilmiş ve hazırlanmıştır.



İşlem

Araştırma kapsamında 1. ve 2. problemin yer aldığı ölçme aracı eşzamanlı olarak iki farklı okulun beşinci, altıncı, yedinci ve sekizinci sınıflarında okuyan öğrencilere uygulanmıştır. Öğrencilerin çözümleri araştırmacıların Van Amerom (2002)'un belirlediği stratejilerden faydalanarak belirledikleri ve Tablo 1'de sunulan ölçütlere göre sınıflandırılmıştır.

Tablo 1.
Çözüm Stratejilerine İlişkin Kriterler

	Stratejiler	Göstergeler
Cebirsel Stratejiler	Bilinmeyenin Birini Yok Etme *(Elimination of One Unknown)*	Bu stratejide öğrenci bilinmeyenlerden birini yok eden bir metot kullandığından, ne yaptığının farkında olduğu için yaptığı hesaplamalar düzenli ve etkilidir. Bu kategoride öğrencilerin geneli değişkenler kullanarak çözümler üretirken, çok az bir kısmı cebirsel düşünceye sahip olmakla beraber, değişken içermeyen aritmetiksel çözümler üretirler.
	Farkı Yarıya Bölme Algoritması *(Algorithm of Halving the Difference)*	Bu strateji bilinmeyene odaklı olduğundan, cebirsel olarak adlandırılır. Cebirsel düşünmede sembolik gösterim önemli olmasına rağmen, cebirsel düşünmenin önkoşulu değildir. Bu stratejide düşünme cebirsel olmakla beraber, düşünceyi ifade etme biçimi aritmetikseldir.
Cebir Öncesi Stratejiler	Simetrik Bir Şekilde Farkı Ayarlama *(Adjusting the Difference Symmetrically)*	Bu strateji bilinmeyen sayıların toplamından ziyade farkına odaklıdır. Bu stratejide öğrenciler sayıların farkına, simetrik bir yaklaşım sergileyecek şekilde mantıklı adımlar tasarlayarak bir dizi girişimde bulunurlar. Bu çözüm stratejisi, verilen sayılarla aritmetik işlemler yapılmasını (toplama, çıkarma) ve bilinmeyenlerle ilgili akıl yürütmeyi de içerdiğinden, bu strateji de cebir eşiği olarak adlandırılır.
	Düşünme ve Deneme *(Reason-and Trial)*	Bu stratejide probleme ilişkin düşünceler yansıtılmaya çalışılır. Öğrenci problemde verilenleri ve istenenleri göz önüne alarak mantıksal çıkarımlarla bilinçli denemeler yapmaya koyulur. Bu strateji ne aritmetik ne de cebir olarak adlandırılamadığından cebir eşiği olarak adlandırılmaktadır.
Aritmetiksel Stratejiler	Deneme ve Uyarlama *(Trial- and-Adjustment)*	Gelişigüzel verilerle bilinmeyenler bulunmaya çalışılır. Öğrenci her bir denemede bir önceki denemesindeki hatasını düşünerek kendisini çözüme yaklaştıran denemeler yapar. Böylece her bir deneme öğrenciyi çözüme yaklaştırır.
	Deneme ve Yanılma *(Trial-and- Error)*	Gelişigüzel hesaplamalarla bilinmeyenler bulunmaya çalışılır. Öğrenci her bir denemede bir önceki denemesindeki hatasını düşünmeksizin gelişigüzel sayılarla sonuca ulaşmaya çalışır. Bu da öğrencinin her bir denemesindeki hatasını küçültmez.
Diğer Stratejiler	Sadece Cevap *(Answer Only)*	Bu kategori, hesaplama ya da açıklama yapmaksızın sadece doğru cevap yazmayı içerir. Bu kategoride, ilgisizlik, tembellik ya da yazmaya karşı aşırı isteksizlik nedeniyle çözüm açıkça ifade edilmez. Bu kategorideki öğrencilerin yanlış strateji kullananlardan daha iyi bir matematiksel anlayışta oldukları kabul edilir.
	Yanlış Stratejiler *(Incorrect Strategies)*	Bu kategori, konuyla ilgili zayıf anlamaları yansıtan çözümler içerir. Öğrencilerin çok azı kendilerinden istendiği için bir cevap yazarken, geriye kalanların çoğu soruyu çözmeye çalışırlar. Ancak bu öğrencilerin çözümleri, verilen değerlerle rasgele işlemler yapmaktan ibarettir.
	Boş *(None)*	Problemle ilgili hiçbir şey yazmayan ve herhangi bir girişimde bulunmayan öğrenciler bu grubu oluşturur. Bu yüzden bu gruptaki öğrenciler etkinliğin ne anlama geldiğini anlayamaz ve etkinliğe karşı oldukça ilgisizdirler.

Verilerin Analizi

İlk olarak her bir öğrenim seviyesindeki öğrencilerin 1. ve 2. probleme ilişkin kullandıkları çözüm stratejisi Tablo 1'deki göstergeler ışığında sınıflandırılmıştır. Daha sonra her bir problemin yüzde hesaplamaları Tablo'da (Tablo 2,3,4,5,6) sunularak yorumlanmıştır. Ayrıca her bir öğrenim seviyesindeki üç öğrencinin problemlere ilişkin çözümleri ve bu çözümlerin hangi sebepten hangi strateji kapsamında değerlendirildiği, ilgili tablodan hemen sonra kısa notlar şeklinde açıklanmıştır.

Bulgular ve Yorumlar

Bu bölümde araştırmanın her bir alt problemine ilişkin elde edilen analiz sonuçları Tablo'da (Tablo 2,3,4,5,6) sunularak tabloya ilişkin yorumlar yapılmıştır.

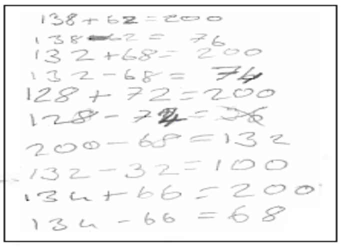
*Bu bölümde kullanılan kısaltmalar: Cebirsel Stratejiyi Kullananların Yüzdesi-(**CSKY**); Cebir Öncesi Stratejiyi Kullananların Yüzdesi-(**CÖSKY**); Aritmetiksel Stratejiyi Kullananların Yüzdesi-(**ASKY**); Sadece Cevap Verenlerin Yüzdesi-(**SCVY**); Yanlış Cevap Verenlerin Yüzdesi-(**YCVY**); Boş Bırakanların Yüzdesi-(**BBY**); Problem-(**P**)*

Birinci Alt Problem: *Her bir öğrenim seviyesindeki öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş düzeylerinin kullanılan problem tipiyle ilişkisi var mıdır?*

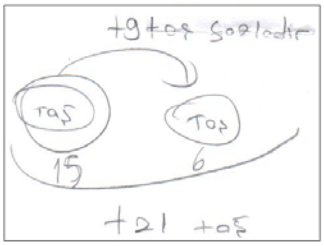
Tablo 2.
Beşinci Sınıf Öğrencilerinin 1. ve 2. Probleme İlişkin Çözüm Stratejileriyle İlgili Bulgular

		CSKY	CÖSKY	ASKY	SCVY	YCVY	BBY
1. P	5. Sınıf	1.7	3.3	24.0	1.7	54.7	14.7
2. P	5. Sınıf	1.7	6.7	26.7	3.3	48.3	13.3

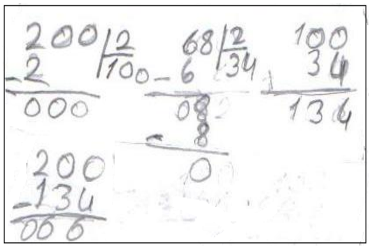
Bazı beşinci sınıf öğrencilerinin, 1. ve 2. probleme ilişkin çözümleri ve bu çözümlere ilişkin değerlendirmeler:



Öğrenci her bir denemede bir önceki denemesindeki hatasını düşünmeksizin gelişigüzel sayılarla sonuca ulaşmaya çalıştığından çözüm **aritmetikseldir.**



Öğrencinin çözümü, sayılarla aritmetiksel işlemler yapmayı (toplama, çıkarma) ve sembollerle akıl yürütmeyi içerdiğinden çözüm **cebir öncesidir.**



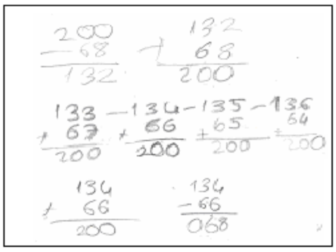
Düşünme şekli cebirsel olmakla beraber düşünceyi ifade etme biçimi aritmetiksel olan öğrenci, bilinmeyene odaklı farkı yarıya bölme algoritmasını kullandığından çözüm **cebirseldir.**

Tablo 2 incelendiğinde, 1. ve 2. probleme ilişkin cebirsel ve aritmetiksel çözüm stratejilerini kullanarak çözüm üretenlerin oranı birbirine yakın değerler iken, cebir öncesi çözüm stratejisini kullanarak çözüm üretenlerin oranı faklılaşmaktadır. Değişken kavramını henüz bilmeyen bu seviyedeki öğrencilerin her iki problemin çözümünde de aritmetiksel çözüm stratejisi kullanmaları beklenen bir durumdur. Ayrıca 1. problemde öğrencilerin % 5'i, 2. problemde % 8.4 değişken kavramını kullanmaksızın cebirsel ve cebir öncesi çözüm stratejisi geliştirmişlerdir. Ancak 1. probleme ilişkin öğrencilerin % 54.7'si ve 2. probleme ilişkin öğrencilerin % 48.3'ü yanlış cevaplar vermişlerdir. Hatta boş bırakanlar da yanlış cevap verenler kategorisinde değerlendirildiğinde öğrenciler, 1. probleme yaklaşık % 70 ve 2. probleme % 60 yanlış cevaplar vermişlerdir.

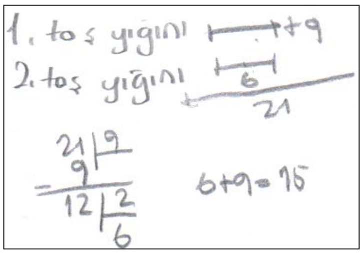
Tablo 3.
Altıncı Sınıf Öğrencilerinin 1. ve 2. Probleme İlişkin Çözüm Stratejileriyle İlgili Bulgular

		CSKY	CÖSKY	ASKY	SCVY	YCVY	BBY
1. P	6. Sınıf	8.3	6.7	31.7	1.7	45.0	6.7
2. P	6. Sınıf	6.7	13.3	40.0	3.3	30.0	6.7

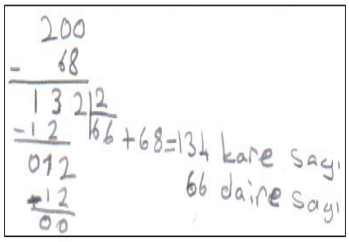
Bazı altıncı sınıf öğrencilerinin, 1. ve 2. probleme ilişkin çözümleri ve bu çözümlere ilişkin değerlendirmeler:



Öğrenci her bir denemede bir önceki denemesindeki hatasını düşünerek kendisini çözüme yaklaştıran denemeler yaptığından çözüm **aritmetikseldir.**



Öğrencinin çözümü, sayılarla aritmetiksel işlemler yapmayı (toplama, çıkarma) ve sembollerle akıl yürütmeyi içerdiğinden çözüm **cebir öncesidir.**



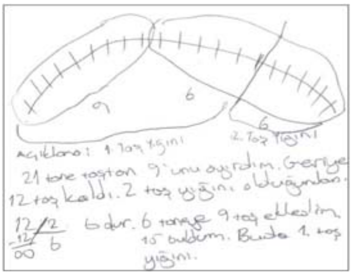
Düşünme şekli cebirsel olmakla beraber düşünceyi ifade etme biçimi aritmetiksel olan öğrenci, bilinmeyenlerden birini yok eden bir metot kullandığından çözüm **cebirseldir.**

Tablo 3 incelendiğinde öğrencilerin her iki problemde kullandıkları çözüm stratejilerinin az da olsa birbirinden ayrıldığı görülmektedir. Formal öğretimde değişken kavramını henüz görmeyen bu seviyedeki öğrenciler beşinci sınıf öğrencileriyle kıyaslandığında, cebirsel ve cebir öncesi çözüm stratejilerinin 1. problemde % 5'ten % 15'e çıktığı, 2. problemde % 8.4'ten % 20'ye çıktığı görülmektedir. Bu çıkışa ilişkin öğrencilerin çözüm stratejileri incelendiğinde, değişken kavramını kullanmadıkları, ancak yaş faktörünün de etkili olduğu varsayımından hareketle bilinmeyenler yerine yer tutucular olarak sembolleri kullanmalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. 1. ve 2. problemde herhangi bir strateji kullanarak çözüm üreten öğrenciler kıyaslandığında, 2. probleme çözüm üretip doğru cevap verenlerin oranı % 60 iken 1. probleme çözüm üretip doğru cevap verenlerin oranı % 46.7'dir. Bu farkın öğrenme ortamlarında öğretmenlerin daha çok 2. probleme benzer ve kelime problemi olarak isimlendirdiğimiz problem türlerine ağırlık vermelerinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu seviyede boş bırakanlar da yanlış cevap verenler kategorisinde değerlendirildiğinde, 1. probleme yanlış cevap verenlerin oranı % 51.7 iken, 2. probleme yanlış cevap verenlerin oranı % 38.3'tür. Oluşan bu farkın da yine problem tipi ile ilişkili olduğuna inanılmaktadır.

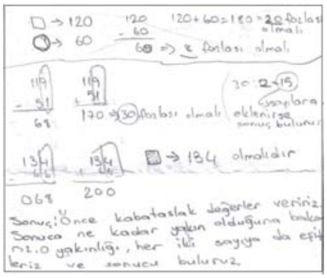
Tablo 4.
Yedinci Sınıf Öğrencilerinin 1. ve 2. Probleme İlişkin Çözüm Stratejileriyle İlgili Bulgular

		CSKY	CÖSKY	ASKY	SCVY	YCVY	BBY
1. P	7. Sınıf	10.0	8.3	33.3	1.7	43.3	3.3
2. P	7. Sınıf	20.0	20.0	16.7	3.3	33.3	6.7

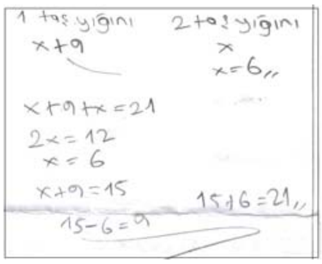
Bazı yedinci sınıf öğrencilerin, 1. ve 2. probleme ilişkin çözümleri ve bu çözümlere ilişkin değerlendirmeler:



Öğrencinin çözümü, sayılarla aritmetik işlemler yapmayı (toplama, çıkarma) ve modellerle akıl yürütmeyi içerdiğinden çözüm **cebir öncesidir.**



Öğrenci problemde verilenleri ve istenenleri göz önüne alarak, sayıların son rakamlarından mantıksal çıkarımlarla bilinçli denemeler yaptığından çözüm **cebir öncesidir.**



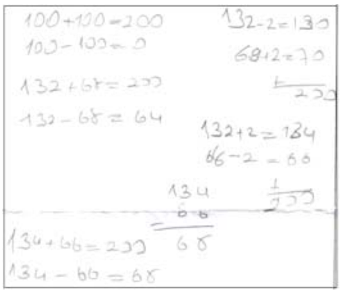
Öğrenci bilinmeyenlerden birini yok eden bir metotla değişken kullandığından çözüm **cebirseldir.**

Bu seviyede öğrenciler formal öğretim vasıtasıyla değişken kavramını görmüşlerdir. Tablo 4 incelendiğinde, cebirsel ve cebir öncesi çözüm stratejisi kullanarak 2. problemi doğru çözenlerin oranı % 40 iken, 1. problemi doğru çözenlerin oranı % 18.3'tür. Tersine aritmetiksel çözüm stratejisi kullanarak 1. problemi doğru çözenlerin oranı % 33.3 iken, 2. problemi doğru çözenlerin oranı % 16.7 dir. Aslında 1. ve 2. probleme çözüm üretip doğru cevap verenlerin oranı birbirine yakın değerlerdir. Ancak kullandıkları çözüm stratejileri kıyaslandığında, 2. probleme cebirsel ve cebir öncesi çözüm stratejisi üretenlerin 1. probleme cebirsel ve cebir öncesi çözüm stratejisi üretenlerden yaklaşık % 100 fazla olduğu, tersine 2. probleme aritmetiksel çözüm stratejisi üretenlerin 1. probleme aritmetiksel çözüm stratejisi üretenlerden % 100 daha az olduğu görülmektedir. Öğrencilerin problemlere ilişkin kullandıkları çözüm stratejileri incelendiğinde, 2. problemde değişken kavramını daha çok kullandıkları görülmüştür. Ancak bu problemde değişken kavramını kullanan tüm öğrencilerin cebirsel ve cebir öncesi düşünme seviyesinde olmadıkları, yukarıda da değinildiği üzere bu problemi alışageldikleri kalıplara uyduğu için çözebildiklerini düşündürmüştür. Çünkü bu öğrencilerin birbirine paralel 1. ve 2. probleme ilişkin kullandıkları çözüm stratejileri kıyaslandığında, bazı öğrencilerin 2. probleme uyguladıkları çözüm stratejisini 1. probleme uygulayamadıkları belirlenmiştir. Bu da bazı öğrencilerin 2. problemi alışageldikleri kalıplara uyduğu için çözebildikleri şeklindeki düşüncemizi doğrulamaktadır. Tablo 4'te boş bırakanlar da yanlış cevap verenler kategorisinde değerlendirildiğinde, 1. probleme yanlış cevap verenlerin oranı % 46.6 iken, 2. probleme yanlış cevap verenlerin oranı % 40'tır.

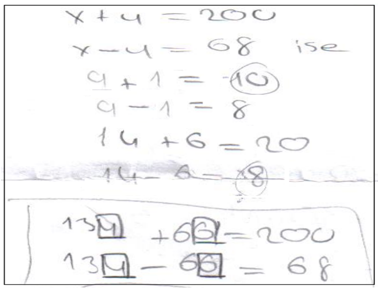
Tablo 5.
Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin 1. ve 2. Probleme İlişkin Çözüm Stratejileriyle İlgili Bulgular

		CSKY	CÖSKY	ASKY	SCVY	YCVY	BBY
1. P	8. Sınıf	18.3	10.0	20.0	6.7	41.7	3.3
2. P	8. Sınıf	35.0	11.7	16.7	3.3	26.7	6.7

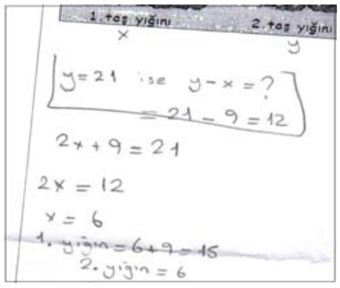
Bazı sekizinci sınıf öğrencilerin, 1. ve 2. probleme ilişkin çözümleri ve bu çözümlere ilişkin değerlendirmeler:



Öğrenci simetrik bir yaklaşım sergileyip, mantıklı muhakemelerle aritmetik işlemler yaptığından ve bilinmeyenlerle ilgili akıl yürüttüğünden bu çözüm **cebir öncesidir.**



Öğrenci problemde verilenleri ve istenenleri göz önüne alarak, sayıların son rakamlarından mantıksal çıkarımlarla bilinçli denemeler yaptığından çözüm **cebir öncesidir.**



Öğrenci bilinmeyenlerden birini yok eden bir metotta iki değişken kullandığından çözüm **cebirseldir.**

Bu seviyede değişken kavramını iyice anlamış olmaları beklenen öğrencilerin çözüm stratejilerine ilişkin Tablo 5 incelendiğinde, cebirsel ve cebir öncesi çözüm stratejisi kullanarak 2. problemi doğru çözenler, 1. problemi doğru çözenlerden % 65 daha fazla iken aritmetiksel çözüm stratejisini kullanarak 2. problemi doğru çözenler, 1. problemi doğru çözenlerden % 20 daha azdır. 1. ve 2. probleme çözüm üretip doğru cevap verenlerin oranı kıyaslandığında, 2. probleme doğru cevap verenlerin oranı 1. probleme doğru cevap verenlerin oranından fazladır. Bu seviyede doğru cevap verenlerin çözüm stratejileri kıyaslandığında, 2. problemde öğrencilerin daha çok değişken kavramını kullandıkları görülmüştür. Birbirine paralel 1. ve 2. probleme ilişkin öğrencilerin kullandıkları çözüm stratejileri incelendiğinde, öğrencilerin 2. probleme uyguladıkları çözüm stratejisini 1. probleme uygulayamamaları, 2. problemi alışageldikleri kalıplara uyduğu için çözebildikleri düşüncesini desteklemektedir. Tablo 5'te boş bırakanlar da yanlış cevap verenler kategorisinde değerlendirildiğinde, 1. probleme yanlış cevap verenlerin oranı % 45 iken, 2. probleme yanlış cevap verenlerin oranı % 33'tür. Bu seviyede ve diğer tüm seviyelerde öğrencilerin 1. ve 2. probleme ilişkin doğru cevap yüzdeleriyle yanlış cevap yüzdeleri arasında bir farkın olması, problem tipinin öğrencilerin doğru cevap yüzdelerini ve yanlış cevap yüzdelerini etkilediğini göstermektedir.

İkinci Alt Problem: *Öğrencilerin aritmetikten cebire geçişleriyle öğrenim düzeyleri arasında bir ilişki var mıdır?*

Tablo 6.
1.ve 2.Probleme İlişkin 5., 6., 7. ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Çözüm Stratejileriyle İlgili Bulgular

	CSKY		CÖSKY		ASKY		SCVY		YCVY		BBY	
	1. P	2. P	1. P	2. P	1. P	2. P	1. P	2. P	1. P	2. P	1. P	2. P
5. sınıf	1.7	1.7	3.3	6.7	24.0	26.7	1.7	3.3	54.7	48.3	14.7	13.3
6. sınıf	8.3	6.7	6.7	13.3	31.7	40.0	1.7	3.3	45.0	30.0	6.7	6.7
7. sınıf	10.0	20.0	8.3	20.0	33.3	16.7	1.7	3.3	43.3	33.3	3.3	6.7
8. sınıf	18.3	35.0	10.0	11.7	20.0	16.7	6.7	3.3	41.7	26.7	3.3	6.7

Tablo 6 incelendiğinde, 1. problemde öğrencilerin öğrenim seviyesi arttıkça cebirsel çözüm stratejileri çok az artma gösterirken, 2. problemde 1. probleme kıyasla daha fazla artma göstermiştir. 1. ve 2. problemde cebirsel çözüm stratejisini kullanan öğrencilerin yüzdeleri kıyaslandığında, 7. ve 8. sınıf seviyelerinde 2. problemi çözenlerin oranı, 1. problemi çözenlerin oranından % 100 fazladır.

1. ve 2. probleme ilişkin cebir öncesi çözüm stratejisini kullanan öğrenciler kıyaslandığında, 5., 6. ve 7. sınıf öğrenim seviyelerinde 2. problemi cebir öncesi çözüm stratejisi ile çözenlerin oranı, 1. problemi aynı strateji ile çözenlerin oranından yaklaşık % 100 daha fazladır. Ancak 8. sınıf seviyesinde her iki problemde de cebir öncesi çözüm stratejisini kullananların yüzde oranları hemen hemen birbirine eşittir. 1. ve 2. problemde cebirsel ve cebir öncesi çözüm stratejilerine ilişkin bu farklılığın temel sebebi, daha önce de değinildiği üzere öğrenme ortamlarında 2. probleme benzer problemlere sıkça yer verilmiş olması olarak düşünülebilir. Aksi takdirde aynı paralelde olan 1. ve 2. problemde cebirsel ve cebir öncesi stratejiyi kullanan öğrencilerin yüzde oranlarının birbirine yakın olması gerekirdi. 8. sınıf seviyesinde cebir öncesi çözüm stratejisini kullanan öğrencilerin % oranlarının birbirine yakın olması, bu seviyede öğrencilerin değişken kavramını daha iyi özümsemiş olmalarıyla ilişkili olabilir.

1. ve 2. problemde aritmetiksel çözüm stratejisini kullanan öğrenciler kıyaslandığında, 5. ve 6. sınıflarda 2. problemi çözenlerin yüzdelik oranı, 1. problemi çözenlerin yüzdelik oranından biraz fazladır. Bu durumunda yine problem tipi ile ilişkili olduğu düşünülmektedir. Çünkü 5. ve 6. sınıf seviyesinde öğrenciler henüz değişken kavramını görmedikleri için 2. problem tipine aşina olsalar bile cebirsel ve cebir öncesi çözümler üretmede 1. problemle kıyaslandığında, bariz bir fark görülmemektedir. Ancak 7. ve 8. sınıf seviyesinde 1. ve 2. probleme aritmetiksel çözüm stratejisini kullananlar kıyaslandığında 2. problemi çözenlerin yüzdelik oranı, 1. problemi çözenlerin yüzdelik oranından düşüktür. Hatta 7. sınıf seviyesinde 2. problemi çözenlerin oranı, 1. problemi çözenlerin oranından % 100 düşüktür. 7. ve 8. sınıf seviyesinde aritmetiksel çözüm stratejisini kullanma oranı, hem değişken kavramıyla hem de problem tipiyle ilişkilidir. Çünkü 7. ve 8. sınıf seviyesinde öğrenciler değişken kavramını gördükleri için ve 2. problem tipine aşina oldukları için cebirsel ve cebir öncesi çözüm stratejileri 1. probleme kıyasla artma gösterirken, buna bağlı olarak 2. problemi aritmetiksel çözüm stratejisini kullanarak çözenlerin oranı, 1. probleme kıyasla azalma göstermiştir. 1. ve 2. problemde cebirsel ve aritmetiksel çözüm stratejilerini kullanarak çözüm üretenlerin oranı, 5. ve 6. sınıf öğrencilerinde öğrenim seviyesi arttıkça artma göstermiştir. Bununla birlikte 7. ve 8. sınıf öğrencilerinde cebirsel çözüm stratejilerinde de öğrenim seviyesi arttıkça bariz bir artma görülürken, aritmetiksel çözüm stratejilerinde 7. sınıf seviyesinde 1. problemde artma, 2. problemde azalma, ancak 8. sınıf seviyesinde her iki problemde de bir azalma görülmektedir. 1. ve 2. problemi cebir öncesi çözüm stratejisini kullanarak çözüm üretenlerin oranı, 5., 6. ve 7. sınıf öğrencilerinde öğrenim seviyesi arttıkça artma göstermiştir. Bununla birlikte 8. sınıf seviyesinde 1. problemi cebir öncesi çözüm stratejisini kullanarak çözenlerin oranı artma gösterirken, 2. problemi çözenlerin oranında bariz bir azalma görülmektedir. 7. ve 8. sınıf seviyesindeki öğrencilerin cebirsel çözüm stratejilerinde diğer seviyelerdeki öğrencilere kıyasla daha iyi olmaları, bu seviyedeki öğrencilerin artan yaşla birlikte zihinsel gelişimlerinin olgunlaşmasıyla, eşitlik ve değişken kavramlarını anlamalarıyla ve cebirsel mantıklarının daha iyi gelişmesiyle ilişkili olabilir.

Tablo 6'da 1. ve 2. probleme ilişkin sadece cevap verenlerin yüzdeleri incelendiğinde, 1. problemde 5., 6. ve 7. sınıf seviyelerinde öğrencilerin oranları birbirine eşit iken, 8. sınıf seviyesinde bir artma görülmektedir. Ancak 2. problemde tüm seviyelerdeki öğrencilerin oranları birbirine eşittir. Ayrıca 1. ve 2. probleme ilişkin yanlış cevap verenlerin ve boş bırakanların yüzdeleri incelendiğinde, öğrencilerin öğrenim seviyesi arttıkça yanlış cevap verme ve boş bırakma yüzdeleri beklendiği gibi azalma göstermektedir. Ancak 1. ve 2. probleme ilişkin yanlış cevap verenlerin ve boş bırakanların yüzdeleri kıyaslandığında, tüm seviyelerde 1. probleme yanlış cevap verenlerin ve boş bırakanların yüzdesinin, 2. probleme yanlış cevap verenlerin ve boş bırakanların yüzdesinden daha fazla olduğu görülmektedir. Bu durum daha önce de değinildiği üzere problem tipi ile ilişkilidir.

Genel olarak aritmetikten cebire geçişin tüm öğrenim seviyelerinde beklenen düzeyde olmadığı anlaşılmaktadır. Bunun çeşitli sebepleri olabilir. Bunlar; aritmetiksel bilginin ve eşitlik kavramının tam özümsenmemiş olması, öğrencilerin değişken kavramını gerçek anlamda kavrayamamaları, öğrencilerin zihinsel gelişimlerinin ve hazır bulunuşluk düzeylerinin cebirin dilini ve yapısını anlamak için yetersiz olması ve öğrenme ortamlarında kullanılan yöntem ve tekniklerin eksikliği şeklinde sıralanabilir.

Sonuç ve Öneriler

Farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin denklem konusunda belirlenen problemlere ilişkin aritmetikten cebire geçiş düzeylerini incelemeye yönelik yürütülen bu çalışmada, öğrencilerin öğrenim düzeyi arttıkça aritmetikten cebire geçişin olumlu yönde geliştiği, ancak öğrenme ortamlarında kullanılan sınırlı çözüm stratejilerinden dolayı hiçbir öğrenim seviyesinde beklenen geçişin gerçekleşmediği saptanmıştır.

Çalışmada kullanılan problemlere ilişkin farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin kullandıkları çözüm stratejileri incelendiğinde, öğrencilerin sözel problemle ilgili olan 2. problemi yapılandırmada ve çözüm yolları üretmede, sembolik problemle ilgili olan 1. problemi yapılandırmaya ve bu yapıya bağlı olarak çözüm yolları üretmeye kıyasla daha iyi oldukları belirlenmiştir. Bu sonuç, Sfard (1987)'ın araştırmasından elde ettiği sonuçla örtüşmektedir.

Öğrencilerin aritmetik işlem bilgilerinde eksikliklerin olması, problem durumlarını sembolleştirme ve modellemedeki yetersizlikleri ve değişken kavramının farklı kullanımlarını bilmemeleri, onların aritmetikten cebire geçişlerini zorlaştıran başlıca nedenler olarak ortaya çıkmaktadır.

Öğrenme ortamlarında farklı problem tiplerine ve farklı çözüm stratejilerine değinilmemesi, öğrencilerin karşılaştıkları problemlere sınırlı çözüm stratejileri geliştirmelerine yol açmaktadır. Bu durum öğrencileri ezbere yönlendirmekle birlikte, aritmetikten cebire geçiş süreçlerini zorlaştırmaktadır.

İlköğretim 5., 6., 7. ve 8. sınıf seviyelerindeki öğrencilerin aritmetikten cebire geçişini sağlamak için gerekli ön bilgilere yeterince sahip olmadıkları anlaşılmıştır. Bu sonuçlara dayalı öneriler şu şekilde sıralanabilir:

- Cebirin tarihsel gelişim süreciyle aritmetikten cebire geçiş ilişkilendirilerek öğrencilerin aritmetikten cebire geçişleri kolaylaştırılabilir. Bu süreci bilen bir öğretmen, öğrencilerin aritmetikten cebire geçerken izleyeceği adımları ve bu süreçte karşılaşabilecekleri zorlukları bilir ve öğrenme etkinliklerini buna göre düzenleyerek geçiş sürecini kolaylaştırabilir.
- Matematikteki fikirlerin açıklanmasında, matematiksel muhakemenin gelişiminde ve ileri matematiksel konuların anlaşılmasında cebirsel düşünmenin oldukça önemli olduğu bilinmektedir. Bu amaçla aritmetikten cebire geçişi kolaylaştıran etkinlikler geliştirilebilir ve bu etkinliklerin etkililiği araştırılabilir.
- Öğrenme ortamlarında farklı problem tiplerine ve farklı çözüm stratejilerine değinilerek, öğrencilerin kendilerine özgü çözümler geliştirmelerine olanak sağlanarak aritmetikten cebire geçiş süreçleri hızlandırılabilir.
- Matematiksel problemlerin her zaman aritmetiksel işlemler yardımıyla bulunamayacağını gösteren problem tiplerine vurgu yapılarak, öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş yapmalarına yardımcı olunmalıdır.
- Müfredatta cebir öncesi etkinliklere yer verilerek, öğrencilerin aritmetikten cebire geçişleri kolaylaştırılabilir.

Kaynakça

Bernardo, A. ve Okagaki, L. (1994). Roles of symbolic knowledge and problem-information context in solving word problems. *Journel of Educational Psychology*, 86, 212-220.

Booth, L.R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Eds.). *The Ideas of Algebra, K-12* (pp. 20–32). Reston, VA: NCTM.

Cooper, T. J., Boulton-Lewis, G., Athew, B., Willss, L. ve Mutch, S. (1997). The transition arithmetic to algebra: Initial understandings of equals, operations and variable. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 21(2), 89-96.

Dede, Y. ve Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24 : 180-185.

EARGED. (1996). İlköğretim (5+3) matematik programı değerlendirme raporu: Ankara.

Falkner, K., Levi, L. ve Carpenter, T. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, *December*, 232-236.

Filloy, E. ve Rojana, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19 - 25.

Hersovics, N. ve Linchevski, L. (1994). A Cognative gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.

Kieran, C. ve Chaloug, L. (1993). Prealgebra: The transitions from arithmetic to algebra. In D.T. Owens (Eds.). *Research İdeas for the Classroom: Middle Grades Mathematics*, (pp 179-198) .New York: Macmillan.

Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: A structural perspective. In S. Wagner ve C. Kieran (Eds.). *Resaearch Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 33-56). Reston,VA: NCTM.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Eds.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Linchevski, L. ve Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmeticand algebra: operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 38–65.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, ve L. Lee (Eds.). *Approaches to Algebra* (pp.65-111). London: Kluwer Academic Publishers.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston,VA:NCTM.

NCTM. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 162-169), Montreal.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: confront historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 15-39.

Sutherland, R. ve Rojana, T. (1993). A Spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behaviour*, 12(4), 351-383.

Swadener, M. ve Soedjadi, R. (1988). Values, mathematics education and the task of developing pupils' personalities: an indonesian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 19(2), 193-208.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In B. Moses (Eds.). *Algebraic Thinking Grades K-12* (pp. 7-14). Reston, VA: NCTM.

Usiskin, Z. (1997). Doing algebra in grades K-4. In B. Moses (Eds.). *Algebraic Thinking, Grades K-12* (pp. 5-7). Reston, VA: NCTM.

Van Amerom, B., A. (2002). *Reinvention of Early Algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Unpublished doctoral dissertation, University of Utrecht, The Netherlands.

Vance, J. (1998). Number operations from on algebraic perspective. *Teaching Children Mathemetics*, 4, 282-285.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher*, *October*, 474-478.

Makale Geliş: 15.01.2007
İnceleme Sevk: 22.02.2007
Düzeltme: 21.03.2007
Kabul: 03.01.2008