



Öğretmenlerin salt sanal sayıların farklı anlamlarına ilişkin kavramsallaştırmaları *

Gülseren Karagöz Akar ¹, Mervenur Belin ², Nil Arabacı ³, Yeşim İmamoğlu ⁴, Kemal Akoğlu ⁵

Öz

Bu çalışma, öğretmenlerin, salt sanal ib sayısının özellikle Kartezyen formunu anlamalarını incelemiştir. Bu çalışma, beş öğretmenin karmaşık sayıların çeşitli formlarına ilişkin anlayışlarını keşfetmeyi amaçlayan bir mesleki gelişim (MG) programının geliştirilmesini içeren kapsamlı bir tasarım-tabanlı araştırma çalışmasının bir parçasıdır. Veri toplama süreci, MG öncesi ve sonrası yazılı oturumlar ile MG sonrasında gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış görüşmeleri içermektedir. Veriler, öğretmenlerin i 'yi kavramsallaştırmalarındaki değişime işaret etmektedir ve başlangıçta bazı öğretmenlerin i hakkında cebirsel veya geometrik olarak muhakeme yapamadıklarını göstermiştir. Ancak, MG'nin tamamlanmasının ardından, tüm katılımcılar i 'yi $x^2 + 1 = 0$ ikinci dereceden denkleminin köklerinden biri olarak tanımlamış ve geometrik olarak karmaşık düzlemde $(0,1)$ noktası olarak temsil edebilmiştir. Ayrıca, tüm katılımcılar i 'nin 90 derecelik bir dönme olarak operatör yorumunu farketmiştir. Bir katılımcı ayrıca b reel sayısı i ile çarpıldığında b 'nin genişletme anlamına dikkat çekmiş ve bir başka katılımcı da tekrarlı toplama anlamı üzerinde durmuştur. Sonuçlar ayrıca öğretmenlerin salt sanal sayıyı kavramsallaştırırken karşılaştıkları belirli zorlukları da vurgulamıştır. Sonuçlar toplu olarak, öğretmen eğitiminde karmaşık sayıların Kartezyen formunun salt sanal kısmının ve karmaşık sayıların operatör anlamlarının ele alınmasının önemini altını çizmektedir. Ayrıca bu sonuçlar, nicel muhakemenin, i birimi de dahil olmak üzere karmaşık sayıları anlamlandırmak için temel bir düşünme biçimi olarak hizmet edebileceğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler

Karmaşık sayıların Kartezyen formu
Öğretmen bilgisi
Nicel muhakeme

Makale Hakkında

Gönderim Tarihi: 27.09.2023

Kabul Tarihi: 06.12.2024

Elektronik Yayın Tarihi: 30.07.2025

DOI: 10.15390/ES.2025.2570

* Bu çalışmanın bir bölümü 18-21 Mayıs 2023 tarihleri arasında düzenlenen International Conference on Education in Mathematics, Science and Technology (ICEMST) Konferansı'nda sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

¹ Boğaziçi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, İstanbul, Türkiye, gulseren.akar@bogazici.edu.tr

² Boğaziçi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, İstanbul, Türkiye, mervenur.belin@bogazici.edu.tr

³ Boğaziçi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, İstanbul, Türkiye, nil.arabaci@bogazici.edu.tr

⁴ Boğaziçi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, İstanbul, Türkiye, yesim.imamoglu@bogazici.edu.tr

⁵ Boğaziçi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, İstanbul, Türkiye, kemal.akoglu@bogazici.edu.tr

Giriş

Sayı sistemleri arasındaki ilişkileri anlamak önemli olduğundan, farklı seviyelerdeki okul müfredatları farklı sayı sistemleriyle çalışmayı gerektirir (CCSM, 2010). Bunlar arasında, karmaşık sayı sistemi, reel sayı sistemini genişlettiği için en kapsamlı olanıdır. Karmaşık sayıların önemi matematik, fizik, mühendislik ve çeşitli uygulamalı alanları kapsamaktadır ve bu da karmaşık sayıları fen, teknoloji, mühendislik ve matematik (STEM/FeTeMM) eğitiminde özellikle önemli bir konu haline getirmektedir. Özellikle karmaşık sayılar, ileri matematik ve fizik konularının yanı sıra kuantum fiziği (Karam, 2020), görelilik, elektromanyetik teori, sinyal işleme (Atmaca vd., 2014), hidrodinamik ve elektrik devreleri (Benítez vd., 2013) gibi farklı mühendislik alanlarındaki kavramların öğrenilmesinde büyük önem taşımaktadır. Bu nedenle, karmaşık sayıların kavramsal bir şekilde anlaşılması, hem disiplinler arası alanlara erişimde hem de bu alanlarda başarılı olmada önemli bir role sahiptir (Anevska vd., 2015).

Literatürde, karmaşık sayıların kapsamlı bir şekilde anlaşılmasının, karmaşık sayıları hem geometrik hem de cebirsel olarak yorumlamayı gerektirdiği savunulmaktadır. Geometrik olarak, bir karmaşık sayı Karmaşık düzlemde bir nokta veya bir vektör olarak düşünülebilir (Fauconnier ve Turner, 2002). Cebirsel olarak, $a + ib$ biçiminde bir ifadedir öyle ki “tek bir sayı olarak kavramsallaştırılması gerekmektedir, yani $a + ib$ ifadesi bir reel sayı ile bir sanal sayıyı birleştiren tek bir niceliktir” (Nordlander ve Nordlander, 2012, s. 633). Sfard'a (1991) göre, karmaşık sayılar, tüm elemanlarının ortak bir yapıya sahip olduğu iyi tanımlanmış bir küme içindeki matematiksel nesneler olarak düşünülebilir. Bazı araştırmacılar, öğrencilerin karmaşık sayıları kavramsallaştırmada karşılaştıkları zorluklara işaret etmektedir. Glas (1998) karmaşık sayıların öğrencilere genellikle sezgisel anlamdan ya da gerçek dünya deneyimleriyle bağlantıdan yoksun, biçimsel, soyut yapılar olarak görüldüğünü öne sürmektedir. Bu soyutlama, öğrencilerin karmaşık sayıları görselleştirmelerini ya da pratikte ne işe yaradıklarını anlamalarını zorlaştırabilir. Nordlander ve Nordlander (2012) ayrıca öğrencilerin karmaşık sayıların gerçek hayata uygulanabilirliğini sıklıkla sorguladıklarını ve karmaşık sayıların neyi temsil ettiklerini kavramakta zorlandıklarını belirtmektedir. Bu zorlukların üstesinden gelmek için araştırmacılar, öğrencilerin herhangi bir sayıyı karmaşık sayı olarak değerlendirmek için sanal birimi görmeye ihtiyaç duyduklarını vurgulamaktadır. Bu nedenle, Kartezyen formun, özellikle de salt sanal bileşenin anlamlı bir şekilde kavranması çok önemlidir. Bu makalede, özellikle öğretmenlerin Kartezyen formun salt sanal bileşeninin farklı anlamlarını kavramsallaştırmalarına odaklanılmıştır.

Sfard (1991), karmaşık sayıları kavramsallaştırmanın, bir kişinin öncelikle Kartezyen formda $i = \sqrt{-1}$ olduğunu fark etmesini gerektirdiğini savunmuştur. Ayrıca, Kontorovich (2018a), $\sqrt{}$ kök sembolünün “...çok anlamlılığı (polysemy)...” ifade eden ve “aynı kavram veya sembolün kullanıldıkları bağlama ve bağlamla ilişkili müfredat normlarına göre farklı şekillerde yorumlanabilen bir olgu” (s. 17) olduğunu belirtmiştir. Örneğin, reel sayılarda, $\sqrt{9}$, 3'e eşittir ve her girdinin tek bir çıktısı olan fonksiyon tanımıyla uyumludur. Öte yandan, karmaşık sayı sisteminde karekök çok değerli bir fonksiyondur ve hem -3 hem de 3, 9'un kökleri olarak kabul edilmektedir (Kontorovich, 2018b). Bu bağlamda, araştırmacılar i 'nin (-1) 'in kareköklerinden biri olarak anlaşılması gerektiğini ve bunun da sınıf içi tartışmalarda “ $\sqrt{-1}$ bir sayı değildir” ifadesinin artık geçerli olmadığı şeklinde bir değişim gerektirdiğini savunmaktadır (Nachlieli ve Elbaum-Cohen, 2021). Ayrıca, i 'nin bir vektör ve bir nokta $(0, 1)$ olarak kavramsallaştırılması gereklidir (örn., Karakok vd., 2015). Bu geometrik yorum, i birimini, b 'nin herhangi bir reel sayı olduğu, Kartezyen formun ib bileşeniyle de ilişkilendirmektedir. Özellikle, ib 'nin i 'nin bir reel sayı ile çarpımı olarak kavramsallaştırılması, i 'nin “reel doğrunun 90°'lik bir dönüşü olarak” (Harding ve Engelbrecht, 2007, s. 967) yorumlanmasına yol açabilir ve bu da Karmaşık düzlemi üretir. Bu bakış açısı, reel sayıların karmaşık sayıların bir alt kümesi olduğunun daha iyi anlaşılmasını sağlar. Aynı zamanda, Karmaşık düzlem ile Kartezyen düzlem arasındaki izomorfizmaya işaret eder (Kontorovich vd., 2021). Bu nedenle araştırmacılar, hem öğrenciler hem de öğretmenler için geometrik ve cebirsel yorumlar arasında esnek bir şekilde geçiş yapmanın faydalı olduğunu öne sürmektedir (Kontorovich vd., 2021).

Matematik öğretmenleri, özellikle STEM/FeTeMM ile ilgili alanlarda karmaşık sayıları anlaması gereken öğrencilerin eğitiminde kilit rol oynamaktadırlar (NCTM, 2000). Bu bağlamda, bu çalışmada öğretmenlerin i ve ib 'yi hem cebirsel hem de geometrik olarak farklı kavramsallaştırmaları bir MG çalışmasının tamamlanmasının öncesinde ve sonrasında incelenmiştir. Bu çalışma literatüre aşağıdaki şekillerde katkı sağlamaktadır.

İlk olarak, salt sanal sayıların kavramsallaştırılması üzerine az sayıda çalışma bulunmaktadır. Bununla birlikte, örneğin, öğretmenlerin karmaşık sayıların farklı formlarını kavramsallaştırmaları üzerine yapılan bir araştırma, öğretmenlerin salt sanal sayıları hem nokta hem de vektör olarak anlamlandırmakta zorlandıklarını ortaya koymuştur (Karakok vd., 2015). Araştırmacılar, öğretmenlerin karmaşık sayıları yalnızca i ile yapılan cebirsel işlemler olarak gördüklerini bildirmiştir. Öte yandan, bazı önemli araştırmacılar karmaşık sayıların Kartezyen formunun oluşturulmasını teorik olarak tartışmış (Örn., Harel, 2013; Sfard, 1991) ve cebirsel bir bakış açısıyla incelemiştir (Örn., Nordlander ve Nordlander, 2012; Panaoura vd., 2006). Ayrıca, önceki bir konferans bildirisinde (Karagöz Akar vd., 2023b), aynı katılımcılarla yapılan aynı MG'nin yalnızca çalışma sonrasına dair ön sonuçları raporlanmıştır. Buna ek olarak, konferans bildirisinde, öğretmenlerin i 'nin reel sayılarla çarpımında çoğunlukla reel sayı kavramları üzerinde durmaları tartışılmış ve karmaşık sayılarla ilgili yanlışlı anlaşıya sahip oldukları sonucuna varılmıştır. Bu çalışmada, bildiriden farklı olarak, öğretmenlerin yanlışlı anlaşıya dair verilerle ilgili ayrıntılı bir analiz sunulmuş, öğretmenlerin karmaşık sayı yanlışlığına sahip olmalarının sebeplerine ilişkin daha fazla neden üzerinde durulmuş ve açıklanmıştır.

İkinci olarak, yukarıda bahsedilen tüm araştırmalardan farklı olarak, bu çalışmada öğretmenlerin i ve ib 'ye ilişkin farklı kavramsallaştırmalarına dair bir gelişim sağlayan MG öncesi ve sonrası verilerinin yanı sıra yaşadıkları zorluklar da rapor edilmiştir. Bu çalışmada, alana daha fazla katkı sunma amacıyla, karmaşık sayıları anlamada önemli bir adım olarak görülen (Sfard, 1991) ve lise öğrencilerinin bilgilerinde eksik olarak rapor edilen (Kontorovich, 2018b; Nachlieli ve Elbaum-Cohen, 2021) i 'nin $x^2 + 1 = 0$ 'ın köklerinden biri olması durumu MG öncesi ve sonrası verilerle ortaya konarak, öğretmenlerin i 'yi hem cebirsel hem de geometrik olarak kavramsallaştırmasındaki değişim özellikle rapor edilmiştir. Ayrıca, farklı öğretmenlerden gelen veriler karşılaştırılarak, ib 'nin döndürme operatörü, genişletme operatörü ve tekrarlı toplama gibi farklı anlamları raporlanmıştır.

Üçüncü olarak, öğretmenlerin i ve ib birimleri hakkında hem vektör hem de Karmaşık düzlemdeki noktalar olarak sahip oldukları anlayışlar nicel muhakeme perspektifinden incelenmiştir. Son olarak, önceki çalışmalarda karmaşık sayıların tarihsel olarak, matematikçilerin kübik polinomların köklerini dikkate almalarıyla ortaya çıktığı vurgulanmıştır (örn. Harel, 2013; Nahin, 2010). Bu çalışmada, karmaşık sayıların ikinci dereceden denklemlerin kökleri olarak nicel muhakeme yoluyla incelenmesi, "karmaşık sayılar herhangi bir polinom denkleminin sahip olduğu yegane köklerdir!" ifadesini desteklemektedir (Harel, 2013, s. 35) ve Cebirin Temel Teoremi ile tutarlı durumdadır. Bir sonraki bölümde, bu çalışma ile alanın nasıl daha da genişletildiği ve karmaşık sayıların nicel muhakeme perspektifinden nasıl tasavvur edilebileceği detaylandırılmıştır.

Kavramsal Çerçeve

Karmaşık Sayılar Üzerine Literatür

Karmaşık sayıların kapsamlı bir şekilde anlaşılması, Kartezyen, kutupsal ve üstel (Euler) formlardaki cebirsel ve geometrik temsillerinin (bkz. Tablo 1) bilinmesini gerektirir. Bu anlayış aynı zamanda bu temsiller arasındaki bağlantıları kurmayı ve bunlar arasında geçiş yapma esnekliğine sahip olmayı da içerir (Karakok vd., 2015).

Tablo 1. Karmaşık Sayıların Farklı Gösterimleri (Karakok vd., 2015, s.329'dan alınmıştır).

Temsil	Form			
	Salt sanal	Kartezyen	Kutupsal	Üstel (Euler)
Cebirsel	$i, \sqrt{-1}, (0,1)$	$a + ib, (a, b), z$	$r(\cos \theta + i \sin \theta), z$	$re^{i\theta}$
Geometrik	Karmaşık düzlemde bir nokta, bir döndürme operatörü	Karmaşık düzlemde bir nokta, büyüklüğü $\sqrt{a^2 + b^2}$ ve pozitif reel eksenle açısı $\tan^{-1}(\frac{a}{b})$ olan bir vektör, bir döndürme ve genişletme operatörü	Orijin merkezli çember üzerinde r yarıçaplı bir nokta, r büyüklüğünde ve pozitif reel eksenle θ açısı olan bir vektör, bir döndürme ve genişletme operatörü	Büyüklüğü r ve pozitif reel eksenle açısı θ olan bir vektör, r yarıçaplı orijin merkezli çember üzerinde bir nokta, bir döndürme ve genişletme operatörü

Ancak, mevcut araştırmalar hem öğrencilerin (Çelik ve Özdemir, 2011; Nordlander ve Nordlander, 2012; Panaoura vd., 2006; Soto-Johnson ve Troup, 2014) hem de matematik öğretmenlerinin karmaşık sayılarla çalışırken karşılaştıkları zorlukları vurgulamaktadır. Özellikle, birçok çalışma, öğretmenlerin genellikle farklı temsiller arasında bağlantı kurmakta zorlandığını bildirmektedir (Conner vd., 2007; Karakok vd., 2015; Nemirovsky vd., 2012). Araştırmacılar, karmaşık sayıları öğretirken hem cebirsel hem de geometrik yaklaşımları entegre etmenin önemine vurgu yapmışlardır.

Soto-Johnson ve Troup (2014) matematik öğrencilerinin karmaşık değerli denklemler hakkında cebirsel ve geometrik olarak nasıl akıl yürüttüklerini araştırmıştır. Elde ettikleri bulgular, öğrencilerin ağırlıklı olarak cebirsel düşünmeye dayandıklarını ortaya koymuştur. Bununla birlikte, denklemlerin geometrik yorumlarını dikkate almaları açıkça istendiğinde, öğrenciler hem cebirsel hem geometrik olarak muhakeme yapabilmişlerdir. Bu nedenle yazarlar, öğrencileri hem geometrik hem de cebirsel akıl yürütmeye teşvik etmenin, iki akıl yürütme biçiminin daha derin bir entegrasyonunu sağlayacağı sonucuna varmışlardır (Soto-Johnson ve Troup, 2014). Benzer şekilde, Nordlander ve Nordlander (2012) mühendislik lisans ve ortaöğretim öğrencilerini kapsayan bir çalışma yürütmüş ve birçok öğrencinin karmaşık sayıların temel doğasını, özellikle de herhangi bir sayının karmaşık sayı olarak kabul edilebileceği fikrini kavramakta zorlandığını tespit etmiştir. Araştırmacılar, sanal birim i 'nin açıkça görünür kılınmasının, öğrencilerin herhangi bir sayıyı karmaşık sayıların bir parçası olarak kavramsallaştırmalarına yardımcı olmak için çok önemli olduğunu savunmuşlardır (Nordlander ve Nordlander, 2012). Bir başka çalışmada, Nachlieli ve Elbaum-Cohen (2021) on ikinci sınıf öğrencilerinin karmaşık sayıları nasıl anladıklarını araştırmıştır. Karmaşık sayıları anlamada önemli bir kriterin, "...sayı kelimesinin, a ve b 'nin reel sayılar olduğu ve i 'nin (-1) in köklerinden biri olduğu, $a + ib$ türündeki nesneleri de ifade ettiğini" (s.5) kabul etmeyi içerdiğini vurgulamışlardır. Çalışmanın bulguları, öğretmenlerin öğrencileri aktif bir şekilde sorgulayarak, onları yansıtıcı ve araştırmacı düşünmeye teşvik etmelerinin reel sayılardan karmaşık sayılara geçişi kolaylaştırabileceğini ve öğrencilerin bu sayılar hakkında hem cebirsel hem de geometrik olarak akıl yürütmelerine olanak sağlayabileceğini göstermektedir. Bu gözlemleri destekleyen Panaoura ve diğerlerinin (2006) çalışması, ortaöğretim öğrencilerinin karmaşık sayıların cebirsel ve geometrik temsillerini aynı matematiksel nesnenin alternatif biçimleri olarak görmek yerine, ayrı varlıklar olarak görme eğiliminde olduklarını ortaya koymuştur. Araştırmacılar bu zorluğun, karmaşık sayıların görsel ya da geometrik yorumlarına çok az vurgu yapılarak, sadece cebirsel olarak tanıtılmasından kaynaklanabileceğini öne sürmüşlerdir.

Ortaöğretim matematik öğretmenleri üzerine yapılan araştırmalar da (Conner vd., 2007; Karakok vd., 2015) karmaşık sayıların kavramsallaştırılmasında, özellikle de Kartezyen, kutupsal ve üstel formlarla ilgili zorlukların altını çizmiştir. Karakok ve diğerleri (2015) üç öğretmen ile yaptıkları bir çalışmada, bir öğretmenin karmaşık sayıları Karmaşık düzlemde noktalar olarak görselleştirmekte zorlandığını tespit etmiştir. Örneğin, i 'nin geometrik olarak gösterilmesi istendiğinde, öğretmen i 'nin orijinin bir birim üzerinde olup olmadığından emin olamamıştır. Başka bir öğretmen ise i 'yi sadece bir sembol olarak görmüş ve karmaşık sayıları i yi içeren cebirsel işlemlerle ifade etmiştir. Her iki öğretmen de vektör temsili Kartezyen formula ilişkilendirmekte zorluk yaşamıştır. Bu bulgular, öğretmenlerin

karmaşık sayıları geometrik yorumlarından ziyade cebirsel işlemler yoluyla algıladıklarını göstermektedir. Bir başka çalışmada, Nemirovsky ve diğerleri (2012) ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının karmaşık sayılar hakkındaki geometrik akıl yürütmelerini araştırmıştır. Fiziksel bir sınıf ortamı kullanarak, öğretmenleri karmaşık sayılarda toplama ve çarpma işlemlerinin geometrik anlamını keşfetmeye teşvik etmişlerdir. Bu uygulamalı yaklaşım ile, katılımcılar i ile çarpımı, Karmaşık düzlemde 90 derecelik bir dönme olarak algılamışlardır. Bu bulgulara dayanarak, Saraç (2016) bir ortaöğretim matematik öğretmeni adayı ile çalışmış ve nicel muamele yoluyla öğretmen adayının karmaşık sayıların Kartezyen formunu nasıl geliştirdiğini incelemiştir. Sonuçlar, katılımcının karmaşık sayıları iyi tanımlanmış bir küme içinde tek bir nicelik olarak, özellikle de reel katsayılı herhangi bir ikinci dereceden denklemin kökleri olarak başarılı bir şekilde kavramsallaştırdığını ortaya koymuştur. Özellikle, Karakok ve diğerlerinin (2015) bulgularının aksine, bu öğretmen adayı i 'yi Karmaşık düzlemde $(0, 1)$ noktası olarak doğru bir şekilde göstermiştir (Saraç ve Karagöz Akar, 2017).

Bu çalışmalara ek olarak, araştırmacılar öğrencilerin karmaşık sayıları anlamalarını geliştirmek için çeşitli öğretim yaklaşımları önermişlerdir. Örneğin, Edwards ve diğerleri (2021) ikinci dereceden bir fonksiyonun karmaşık köklerini görselleştirmek için 3D grafiksel gösterimlerin kullanılmasını önermiştir. Murray (2018), öğrencilerin reel ve reel olmayan (sanal) kökleri ayırt etmelerine yardımcı olmak için geometrik dönüşümlerin kullanılmasını, özellikle de öğrencilerin ikinci dereceden bir fonksiyonun tepe noktasından kökleri yansıtmaları yapmalarını önermiştir. Diğer çalışmalar Bilgisayar Cebir Sistemleri (CAS), Bilgisayar Destekli Değerlendirme Sistemleri (CAA) (Gaona vd., 2022) ve GeoGebra (Caglayan, 2016; Seloane vd., 2023) gibi dijital araçların karmaşık sayıların öğretimindeki önemini vurgulamaktadır. Bu teknoloji tabanlı ve görsel yaklaşımlar, öğrencilerin karmaşık sayıları anlamalarını ve hem reel hem de karmaşık katsayılı denklemlerin köklerini geometrik bir perspektiften yorumlama becerilerini desteklemektedir.

Bahsi geçen çalışmalar, öğretmenlerin ve öğrencilerin karmaşık sayılar hakkında sağlam bir anlayış geliştirmeleri için karmaşık sayıların cebirsel ve geometrik anlamlarına ve özellikle de i birimine vurgu yapılması gerektiğini göstermektedir. Mevcut çalışmalar önemli bilgiler sağlamakla beraber, özellikle salt sanal sayıların farklı anlamlarına odaklanmamıştır. Bu çalışmada, hizmet içi öğretmenlerin salt sanal sayılara ilişkin kavramsallaştırmalarını raporluyoruz. Buna ek olarak, araştırmacılar olarak, bu çalışmada, nicel muhakemenin öğretmenlerin karmaşık sayılara ilişkin kavramlarının gelişiminde derin ve kapsamlı bir düşünme süreci sağlayabileceğini düşünüyoruz: İlk olarak, herhangi bir karmaşık sayıyı nicel muhakeme çerçevesi perspektifinden ifade ediyoruz (Thompson, 1990; Thompson ve Carlson, 2017). Bu bakış açısıyla, bu makalede, karmaşık sayıları reel katsayılı herhangi bir ikinci dereceden denklemin köklerinin nicelleştirilmesi olarak ele alıyoruz (Karagöz Akar vd., 2024; Karagöz Akar vd., 2023, Karagöz Akar vd., 2023a; Saraç ve Karagöz Akar, 2017). Bu bağlamda, literatürde önerildiği üzere (örneğin, Kontorovich, 2018b; Nachlieli ve Elbaum-Cohen, 2021), bir MG çalışmasının tamamlanmasından önce ve sonra öğretmenlerin i 'yi anlamlandırmalarındaki değişimi gösteren verileri raporluyoruz. İkinci olarak, i 'nin anlamını nicel muhakeme açısından ifade ederek, vektörlerin i 'nin bir nokta olarak anlamlandırılmasında aracı fikir olabileceği üzerinde duruyoruz. Bu durum, öğretmenlerin i 'yi hem nokta hem de vektör olarak anlamlandırmakta güçlük çektiklerinin raporlanmış olması nedeniyle özellikle önemlidir (Karakok vd., 2015). Buna ek olarak, College Board of Mathematical Sciences (CBMS) "karmaşık sayıların lise ve üniversite arasındaki eğitim boşluğuna düşebileceğini, lise öğretmenlerinin karmaşık sayıların üniversitede öğretilceği, üniversite öğretmenlerinin ise lisede öğretilmediğini varsaydığını" vurgulamıştır (CBMS, 2012, s. 64). Dolayısıyla, salt sanal sayılar hakkında nicel muhakeme bakış açısıyla akıl yürütmek, ortaöğretim müfredatının çoğunda yer alan ve öğrencilerin bilmesi beklenen " $i^2 = -1$ olacak şekilde bir i karmaşık sayısı vardır ve her karmaşık sayı a ve b reel olmak üzere $a + ib$ biçimindedir" (CCSSM, 2010, s. 60) gibi geleneksel düşünme biçiminin ötesine geçerek, alana yeni bir bakış açısı sağlayabilir. Bu bağlamda, bu çalışmada, aşağıdaki araştırma soruları incelenmiştir:

1. Nicel muhamekeye odaklanan bir mesleki gelişim programından önce ve sonra öğretmenlerin cebirsel ve geometrik olarak *i'*yi kavramsallaştırmaları nasıldır?
2. Nicel muhakemeye odaklanan bir mesleki gelişim programını tamamlayan öğretmenler *ib* hakkında cebirsel ve geometrik olarak ne gibi farklı anlayışlara sahiptir?

Aşağıdaki bölümde, nicel muhakemenin temel yapı taşları (kavramları) ve karmaşık sayıların nicel muhakeme bakış açısı ile nasıl kavramsallaştırıldığı açıklanmıştır.

*Nicel Muhakeme*⁶

Nicel muhakeme, bir bireyin “bir durumu niceliksel bir yapı içinde analiz etmesi” anlamına gelir (Thompson, 1990, s. 13). Moore ve diğerleri (2009) ise nicel muhakemeyi “...bir bireyin bir durumu tasarlaması, tasarladığı duruma ilişkin nicelikler oluşturmaları ve bu oluşturulan nicelikler arasındaki ilişkileri hem geliştirmesi hem de bunlar hakkında muhakeme yapması şeklindeki zihinsel eylemler” olarak tanımlamıştır (s. 3). Nicelik, nicelleştirme ve nicel yapı, nicel muhakeme içindeki en önemli kavramlardır.

Bir kişinin zihninde *nicelik*, bir nesnenin ölçülebilir bir niteliğidir (Thompson, 1990). Bir kişi, uygun bir birimi açık veya örtük bir şekilde kavramsallaştırarak bir nesnenin ve onun ölçülebilir niteliklerinin zihinsel bir imgesine sahip olur (Thompson, 1994). Bu perspektiften bakıldığında, karmaşık sayıları yönlendirilmiş uzaklıklar olarak iki niceliğin birleşimi şeklinde anlıyoruz (Karagöz Akar vd., 2024). Bu anlayış, matematiksel bir nesne olan ikinci dereceden fonksiyonların analiz edilmesiyle, denklem köklerinin ve fonksiyonun tepe noktasının x-koordinatının (apsis) noktasal olarak düşünülmesini sağlar. Ayrıca, bunların birbirlerine ve orijine olan uzaklıklarının nicelik olarak anlaşılmasını ve nicelikler arası ilişkiler olarak değerlendirilmesini içerir (bkz. Şekil 1). *Nicel yapı*, nicelikler ve nicel ilişkilerden oluşan bir ağ olarak görülür; burada “*nicel ilişki*, üçüncüsünün, ikisi arasındaki nicel bir operasyonla oluşturulduğu, üç niceliğin kavranmasıdır” (Thompson, 1990, s. 11). Dolayısıyla *nicel operasyonlar*, nicelikleri inşa eden zihinsel eylemlerdir. *Nicelleştirme*, nicelikleri ve nicel ilişkileri inşa etme sürecinin tamamını ifade eder. Bu çalışmada, ikinci dereceden fonksiyonlarla bağlantılı olarak karmaşık sayıların nicel muhakeme yoluyla nasıl kavramsallaştırıldığı, aşağıda daha ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

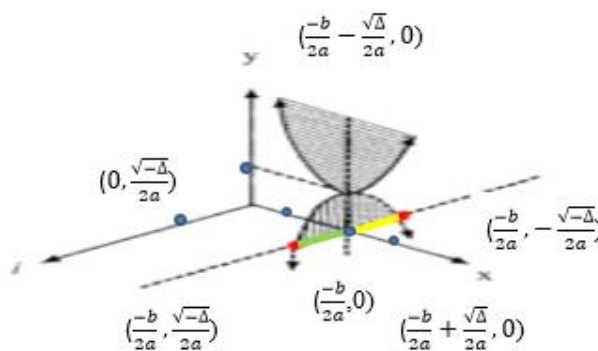
Moore ve diğerlerinin (2009) vurguladığı gibi, bir durumu tasavvur etmek bir nesneyi ve onun niteliklerini tahayyül etmeyi gerektirir; öyle ki zihinsel imge “bir problem ifadesinden veya matematiksel bir nesneden (örneğin bir grafikten) yorumlanan bir imge olabilir” (Moore vd., 2009, s.3). Bu bağlamda, bu çalışmada düşünce nesneleri, koordinat düzlemi üzerinde yer alan paraboller, ikinci dereceden fonksiyon kökleri ve tepe noktasının apsisi gibi ölçülebilir özelliklere sahip niceliklerdir. Yani, reel katsayılı ikinci dereceden herhangi bir $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin iki kökü $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ biçimindedir. Burada $(b^2 - 4ac)$ diskriminant (Δ) olarak adlandırılır. $(-\frac{b}{2a})$ tepe noktasının apsisi ve $\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ise $(-\frac{b}{2a}, 0)$ noktasının x ekseninde köklere olan uzaklığıdır (Hedden ve Langbauer, 2003). Öğrenci, $\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ y1, tepe noktasının apsisi ile kökler arasındaki mesafenin ölçüsü olarak değerlendirdiğinde, bu bir nicelik olarak kabul edilir. Benzer şekilde, bir kişi köklerin sıfır noktasına olan uzaklıklarını değerlendirdiğinde, kökler de bir nicelik olarak kabul edilir.

Bu makalede, böyle bir ikinci dereceden kök anlayışının, karmaşık sayıların, iyi tanımlanmış bir kümenin elemanları olarak (Sfard, 1991), reel katsayılı ikinci dereceden denklemlerin kökleri olduğu fikrini destekleyebileceği iddia edilmektedir. Bunun için, nicel muhakemenin iki temel yapı taşı olan *kovaryasyon* (eşzamanlı değişim) ve *çarpımsal nesne* (Thompson vd., 2017) üzerinde aşağıdaki şekilde durulmaktadır.

⁶ Makalede (nicel) muhakeme ve (nicel) akıl yürütme aynı anlamda kullanılmıştır.

Öncelikle, cebirsel olarak, “tüm karmaşık sayıların $x + iy$ biçiminde olduğunu biliyoruz, burada x ve y reel sayılardır. Reel sayılar pozitif, negatif ya da sıfır olan tüm sayılardır” (Panaoura vd., 2006, s. 683). Ayrıca $x + iy$, (x, y) ve z gibi cebirsel gösterimler ve Karmaşık düzlemdeki bir nokta gibi geometrik gösterimler de dikkate alınmaktadır (Karakok vd., 2015). O halde, herhangi bir karmaşık sayı, $z = x + iy$, verildiğinde, x ve y ye öyle anlamlar yüklenebilir ki x cebirsel olarak $-\frac{b}{2a}$ 'yı ve geometrik olarak herhangi bir ikinci dereceden fonksiyonun tepe noktasının apsisini; y ise cebirsel olarak $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ 'yı ve geometrik olarak köklerin $(-\frac{b}{2a}, 0)$ 'a olan uzaklıklarını ifade eder (bkz. Şekil 1). Saldanha ve Thompson (1998) *kovaryasyon* kavramını bir kişinin “...iki niceliğin değerlerinin (büyüklüklerinin) sürekli bir görüntüsünü aynı anda zihninde tutması” olarak tanımlamıştır (s. 299). O halde, *çarpımsal nesne* kavramı, bir kişinin niceliklerin ortak değişkenliğine ilişkin imgesine dayanır. Bir kişi, “... herhangi bir niceliğin büyüklüğünü, her an diğer niceliğin (niceliklerin) de bir büyüklüğe (büyüklüklere) sahip olduğunun doğrudan, açık ve devamlı bir şekilde farkına vararak izler” (Stevens, 2019, s. 42) şeklinde bir çarpımsal nesne tasarlar. Bu nedenle, kişi ikinci dereceden denklemlerin kök formülünü ayrıştırabilir ve örneğin x_1 ve x_2 reel sayı köklerini, $-\frac{b}{2a}$ 'yı tepe noktasının x-koordinatı (aynı zamanda simetri eksenini) ve $\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ 'yı tepe noktasının köklere olan uzaklığı olarak reel sayı doğrusu üzerinde konumlandırarak düşünebilir (Bkz. Şekil 1). Tepe noktasının x-koordinatını, onun orijine olan uzaklığı ve köklere olan uzaklığı ile birlikte düşünmek, bir bireyin zihninde bir nicelik oluşturmasını sağlar (Bkz. Şekil 1). Böylece, herhangi bir ikinci dereceden denklemin köklerini, orijine uzaklığı ve tepe noktasının x-koordinatına uzaklığı olan (yani, $\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$), bir nicelik olarak düşünülebilir. Başka bir deyişle, üç nicelik düşünülebilir: 1) köklerin ve tepe noktasının x-koordinatının, orijine olan uzaklıkları ve 2) köklerin, tepe noktasının x-koordinatına olan uzaklıkları. Daha sonra, bu nicelikler arasındaki nicel ilişkiler, köklerin ve tepe noktasının x-koordinatının sayı doğrusu üzerinde bir nokta olarak ve birbirleriyle ilişkili mesafeler olarak nasıl konumlandırıldığını tasavvur etmeyi gerektirir.

Dolayısıyla, *çarpımsal nesne* kavramından yola çıkarak, (x, y) veya $(-\frac{b}{2a}, \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})$ sıralı ikilisinin, iki niceliğin büyüklüklerini aynı anda birleştiren iki bileşenli tek bir nicelik olduğu düşünülebilir (Thompson vd., 2017). Burada her nokta, reel katsayılı herhangi bir ikinci dereceden denklemin kökler kümesinin bir elemanıdır. Bu bağlamda, bu çalışmada, karmaşık sayılar nicel olarak, köklerin (yani ikinci dereceden denklemlerin olası tüm köklerinin) Karmaşık düzlemdeki orijinden uzaklığının bir ölçüsü olarak ele alınmaktadır.



Şekil 1. Düzlemde reel katsayılı ikinci dereceden bir denklemin tüm köklerinin yerinin belirlenmesi (Melliger, 2007'den değiştirilmiştir)

Bu nicel yapıda, formülün bir parçası olan $\sqrt{-1} \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ iki şekilde düşünülebilir: Bir kişi $\sqrt{-1}$ 'i $x^2 + 1 = 0$ 'ın köklerinden biri olarak düşünebilir ve formülün diğer kısmı olan $\frac{-b}{2a}$ 'nın sıfır olduğunu göz önünde bulundurarak $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ 'ya 1 gibi sayısal bir değer atayabilir. Bu, $\sqrt{-1}$ 'in geometrik anlamını, orijinin üzerinde bir birim mesafe ile sanal eksen üzerinde $(0,1)$ noktası olarak düşünmeyi de sağlayabilir. Bu

imge, $\sqrt{-1}$ 'in bir çarpan ve $\frac{\sqrt{-A}}{2a}$ 'nın bir çarpılan olarak anlaşılmasını tetikleme potansiyeline sahiptir, çünkü $\sqrt{-1}$, $(\frac{\sqrt{-A}}{2a}, 0)$ formundaki herhangi bir reel sayının saat yönünün tersine 90 derece döndürülmesi (yani bir döndürme operatörü) olarak düşünülebilir ve sanal eksen üzerinde $(0, \frac{\sqrt{-A}}{2a})$ olarak konumlandırılabilir. Bu görüntü aynı zamanda Descartes'in düşündüğü şeyle de uyumludur: reel doğruyu kendi üzerine bindirmek, tüm noktaları 90 derece döndürmek, bu da koordinat düzlemini (R^2) verecektir (Fauconnier ve Turner, 2002). Bu görüntü, $\frac{\sqrt{-A}}{2a}$ 'nın bir çarpan (operatör) ve $\sqrt{-1}$ 'in bir çarpılan olarak düşünülmesini de sağlayabilir, çünkü kişi $\frac{\sqrt{-A}}{2a}$ 'nın bir reel sayı olduğunu bilir. Daha önce de belirtildiği gibi, karmaşık sayıların herhangi bir biçimini anlamak için karmaşık sayıların cebirsel ve geometrik anlamlarını aynı anda göz önünde bulundurmak gerekir.

Yöntem

Bu çalışma, bir mesleki gelişim (MG) çalışması yoluyla öğretmenlerin karmaşık sayılar konusundaki alan bilgilerini geliştirmeyi amaçlayan tasarım-tabanlı bir araştırmanın parçasıdır. Araştırma kapsamında sınıf içi öğretim deneyleri ve ardından çoklu durum çalışması gerçekleştirilmiştir (Yin, 2014). Bu makalede, çoklu durum çalışmasından elde edilen bulgular sunulmakta ve öğretmenlerin MG'yi tamamlamadan önce ve tamamladıktan sonra salt sanal sayıya ilişkin farklı anlayışlarıyla ilgili mevcut bilgileri raporlanmaktadır.

Katılımcılar ve Veri Toplama Süreci

Bu çalışmaya iki ila on yıllık öğretmenlik deneyimine sahip ve ortaöğretim matematik öğretmenliği mezunu beş matematik öğretmeni katılmıştır. Seçim süreci, on öğretmenin karmaşık sayılar üzerine açık uçlu yazılı bir değerlendirmeyi tamamlamasıyla başlamıştır (ilk yazılı oturum). Bu oturumda katılımcılardan ikinci dereceden fonksiyonların ve denklemlerin, karmaşık sayıların farklı gösterimlerinin ve vektörlerin cebirsel ve geometrik tanımlarını vermeleri istenmiştir. Verdikleri yanıtların analizine dayanarak, çalışmanın pedagojik hedefleriyle uyumlu ön bilgilerine göre sekiz katılımcı amaçlı olarak seçilmiştir (Simon, 2000): 1) Katılımcılar ikinci dereceden fonksiyonlar ve vektörlerin tanımı hakkında bilgi sahibi olduklarını göstermişlerdir. 2) Katılımcılar karmaşık sayıların Kartezyen, kutupsal veya üstel formlarından ya hiç bahsetmemişler ya da bu gösterimler arasındaki ilişkileri açıklamamışlardır. Bununla birlikte, beş katılımcı çalışmaya katılabileceklerini beyan etmiştir.

Tablo 2'de gösterildiği gibi, çalışma her biri 120 ila 150 dakika süren dört öğretim oturumunu içermektedir.

Tablo 2. Veri Toplama Süreci

Oturumlar	Oturumların içeriği
İlk yazılı oturum	Katılımcıların geçmiş bilgilerinin analizi
MG oturum 1	Kartezyen form, farklı parabollerin grafikleri ve aralarındaki uzaklıklar
MG oturum 2	Kartezyen form ve karmaşık sayıların geometrik gösterimi
MG oturum 3	Vektörlerin tanımı ve özellikleri ve karmaşık sayıların kutupsal formu
MG oturum 4	Karmaşık sayıların üstel formu
Son yazılı oturum	Katılımcıların mevcut bilgilerinin analizi
Yarı yapılandırılmış görüşmeler	Katılımcıların karmaşık sayıların farklı formları arasındaki bağlantılara ilişkin mevcut kavramsallaştırmaları (30-45 dk.)

İlk iki oturum, karmaşık sayıların Kartezyen formunun ikinci dereceden denklemlerle ilişkili olarak nicel muhakeme yoluyla incelenmesine odaklanmıştır (Saraç ve Karagöz Akar, 2017). Üçüncü oturumda kutupsal form, son oturumda ise üstel (Euler) formu ele alınmıştır.

Tasarım-tabanlı araştırmalar bağlamında, bu çalışmada karmaşık sayılar nicel bir yapı içinde incelenerek nicel muhakeme teorisine odaklanılmıştır. Bu nicel yapıda karmaşık sayılar reel katsayılarla sahip herhangi bir ikinci dereceden denklemin kökleridir ve yönlendirilmiş uzaklıklar olarak iki

niceliğin birleşimi şeklinde anlaşılmaktadır. Katılımcılar ikinci oturumda reel katsayılı herhangi bir ikinci dereceden denklemin kökleriyle ilişkili olarak karmaşık sayıların bir tanımına ulaştıktan ve bunları karmaşık düzlemde noktalar olarak konumlandırdıktan sonra (bkz. Şekil 1), üçüncü oturumda ise katılımcılardan, salt sanal sayılara özgü olarak, vektör tanımını göz önüne alarak konumlandırılan noktaların nitelikleri hakkında düşünmeleri istenmiştir. Öğretmenler bu konuları göz önüne aldıktan sonra, karmaşık sayıları nasıl vektör olarak düşündüklerini gerekçelendirebilmişlerdir. Bu noktada, $x^2 + 1 = 0$ denkleminin köklerini, herhangi bir ikinci dereceden denklemin köklerinin bileşenleri, yani $\frac{-b}{2a}$ ve $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ cinsinden değerlendirmeleri istenmiştir. Öğretmenler, sayısal olarak $\frac{-b}{2a}$ 'nın 0'a ve $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ 'nın 1'e eşit olduğu sonucuna varmışlardır. Karmaşık sayıların, orijine olan uzaklıkları ve yatay eksene olan açı ölçüleri ile vektörler olarak temsil edilebileceğine dair bilgileri, katılımcıların Karmaşık düzlemde i 'nin bir vektör ve (0, 1) noktası olarak temsil edilebileceğini düşünmelerine olanak sağlamıştır.

MG oturumları sona erdikten sonra, son yazılı bir oturum gerçekleştirilmiştir. Ardından, MG'yi de yürütmüş olan birinci yazar, katılımcıların karmaşık sayıların farklı formları arasındaki bağlantıları nasıl anladıklarına dair yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirmiştir. Görüşmeler, diğer araştırmacılar tarafından da gözlenmiş ve videoya kaydedilmiştir. Görüşmeler 30 ila 45 dakika arasında sürmüştür. Ayrıca, katılımcıların yazılı materyalleri de toplanmıştır. İlk ve son yazılı oturumlarda i 'nin anlamına ilişkin olarak şu sorular yer almıştır: “ i sayısının ne olduğunu açıklayabilir misiniz? Karmaşık düzlemde gösterebilir misiniz? Lütfen i^2 'yi cebirsel ve geometrik olarak açıklayınız. Cevabınızı gerekçelendiriniz.” Ayrıca, MG sonrası görüşmelerde “Geometrik olarak i 'yi nasıl gösterebiliriz? Karesini (i^2) cebirsel olarak nasıl ifade ederiz? Geometrik olarak nasıl ifade ederiz? i 'nin $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ile çarpımı ($i \cdot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$), Karmaşık düzlemde nerededir?” gibi sorular sorulmuştur.

Veri Analizi

Veri analizi için sürekli karşılaştırma yöntemi kullanılmıştır (Clement, 2000). Araştırma ekibi katılımcıların yazılı yanıtlarını ve tüm görüşmelerin dökümlerini birlikte incelemiş ve öğretmenlerin karmaşık sayıları hem cebirsel hem de geometrik olarak nasıl kavramsallaştırdıklarını belirlemek ve karakterize etmek için gerektiğinde video kayıtlarını izlemiştir. Her bir katılımcının, her bir görüşme sorusu için çözümlemelerdeki tek bir cümleden bir paragrafın tamamına kadar değişen ifadeler analiz birimi olarak kullanılmıştır. Analiz nicel muhakeme yapıları kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Özellikle, öğretmenlerin karmaşık sayıları nicel olarak nasıl anladıklarına, örneğin i karmaşık sayısını orijinden bir birim uzaklık olarak temsil etmelerine ve bunun anlamını bir operatör olarak nasıl açıkladıklarına odaklanılmıştır. Veriler önce her bir katılımcı için ayrı ayrı analiz edilmiştir. Ardından, farklı katılımcıların her bir soruya verdiği yanıtlar karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Katılımcıların i ve ib karmaşık sayılarını nicel muhakeme yoluyla nasıl kavramsallaştırdıklarını gösteren anlatılar oluşturulmuş ve düşünce süreçlerindeki benzerlik ve farklılıklar karşılaştırılıp yorumlanmıştır.

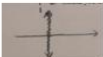
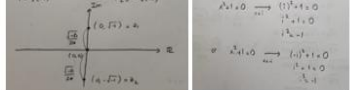
Bulgular

Bu bölümde öncelikle i 'nin tanımı ve geometrik temsili de dahil olmak üzere katılımcıların farklı kavramsallaştırmalarına ilişkin ilk ve son yazılı oturum sonuçları sunulacaktır (Bkz. Tablo 3). Ardından, bir katılımcının karmaşık düzlemde i 'yi bulmakta zorlanmasına dair görüşme verileri paylaşılacaktır. Ayrıca öğretmenlerin MG öncesi ve sonrasında i 'nin kuvvetlerinin cebirsel ve geometrik anlamlarına ilişkin yanıtlarına dair veriler de sunulacaktır. Ek olarak, iki katılımcının karmaşık sayı önyargısını ele almasına ilişkin verileri paylaşılacak ve son olarak, katılımcıların ib ve i 'nin farklı anlamlarına yönelik görüşme verilerinden örnekler sunulacaktır.

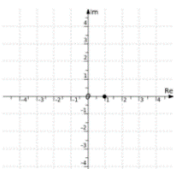
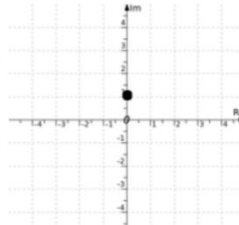
i'nin Karmaşık Düzlemde Bir Nokta Olarak Tanımlanması ve Temsil Edilmesi

Tüm katılımcılar i 'yi MG öncesi ve sonrasında Tablo 3'te belirtildiği şekilde tanımlayabilmıştır.

Tablo 3. Öğretmenlerin MG Öncesi ve Sonrasında i 'nin Tanımı ve Geometrik Anlamına İlişkin Yanıtları

	MG Öncesi	MG Sonrası
Ö1	It is the imaginary constant defined as $i = \sqrt{-1}$.  $i = \sqrt{-1}$ olarak tanımlanan sanal sabittir.	It is the imaginary constant. It's square is -1. Algebraically it is $i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ Geometrically it is the point $(-1,0)$ on the complex plane that is to say it is on the real line.  i sanal sabittir. Karesi -1 dir. Cebirsel olarak $i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ dir Geometrik olarak karmaşık düzlemde $(-1, 0)$ noktasıdır, yani reel eksen üzerindedir.
Ö2	i is defined to be the root of the equation $x^2 + 1 = 0$ and $i = \sqrt{-1}$  i $x^2 + 1 = 0$ denkleminin kökü olarak tanımlanır ve $i = \sqrt{-1}$ dir.	When Δ is less than zero ($\Delta = b^2 - 4ac$) roots of the quadratic eqn. is not real. To be able to take Δ out of the square root we use the following property and define the number i. Given that $\Delta < 0$ $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-b^2 + 4ac} = \sqrt{-b^2} \sqrt{4ac} = \frac{-b}{2a} \cdot \sqrt{-1} \sqrt{4ac} = \frac{-b}{2a} \cdot \sqrt{-1} \cdot \frac{\sqrt{4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \cdot \sqrt{-1} \cdot \frac{\sqrt{4ac}}{2a}$ On the other hand i is one of the roots of $x^2 + 1 = 0$  Δ sıfırdan küçük olduğunda ($\Delta = b^2 - 4ac$) ikinci dereceden denklemin kökleri reel değildir. Δ'yı karekök içinden çıkarabilmek için aşağıdaki özelliği kullanarak i'yi tanımlarız. ... Öte yandan i, $x^2 + 1 = 0$ 'ın köklerinden biridir.
Ö3	Could you explain what the number i is? i is the complex number unit whose square equals -1.  i, karesi -1'e eşit olan kompleks sayı birimidir.	i is the number which places at the point $(0,1)$ in imaginary axis.  i sanal ekseninde $(0, 1)$ noktasına yerleşen sayıdır.
Ö4	i is an imaginary number which equal to $\sqrt{-1}$. In other words, its square $i^2 = -1$. When the complex numbers are shown in the complex plane x-axis represents the real part and the y-axis represents the complex part. "i" is the square root of -1. In the complex plane that has a one-unit distance from the origin on the y-axis is the place of "i". i, $\sqrt{-1}$'e eşit bir sanal sayıdır. Başka bir deyişle karesi $i^2 = -1$ dir. Karmaşık sayılar karmaşık düzlemde gösterildiğinde x eksenini reel kısmı, y eksenini karmaşık kısmı temsil eder. i, -1'in kare köküdür. Karmaşık düzlemde i'nin yeri y ekseninde orijine bir birim uzaklıktadır.	"i" and its conjugate "$-i$" are the roots of the quadratic equation $x^2 + 1 = 0$. In the complex plane, these two complex numbers indicate the point that $\sqrt{-1}$ unit distance from the abscissa of the vertex ($x = -b/2a$) which has the value 0.  i ve eşleniği $-i$, $x^2 + 1 = 0$ ikinci derece denkleminin kökleridir. Karmaşık düzlemde bu iki karmaşık sayı, değeri sıfır olan tepe noktasının apsinden $(-b/2a)$ $\sqrt{-1}$ birim uzaklıktaki noktayı işaret ederler.

Tablo 3. Devamı

MG Öncesi	MG Sonrası
Ö5 In real numbers set, square roots of negative numbers cannot be defined because there are no real numbers whose squares are negative. To define them, square root of -1 is defined as imaginary. a. Could you show it on the complex plane? Real part is 0 and the imaginary part is 1. 	The number "i" is one of the roots of quadratic equation $x^2 + 1 = 0$. In real numbers set, square roots of negative numbers cannot be defined because there are no real numbers whose squares are negative. Square root of -1 is defined as imaginary number. a. Could you show it on the complex plane? The number "i" is a complex number where the real part is 0 and the imaginary part is 1. This is how we show it on complex plane: 
Reel sayılar kümesinde negatif sayıların karekökleri tanımlanamaz çünkü karesi negatif olan hiç reel sayı yoktur. Bunları tanımlamak için -1'in karekökü sanal olarak tanımlanır. a. Karmaşık düzlemde gösterebilir misin? Reel kısmı 0 ve sanal kısmı 1.	i sayısı ikinci dereceden $x^2 + 1 = 0$ denkleminin köklerinden biridir. Reel sayılar kümesinde negatif sayıların karekökleri tanımlanamaz çünkü karesi negatif olan hiç reel sayı yoktur. Bunları tanımlamak için -1'in karekökü sanal sayı olarak tanımlanır. a. Karmaşık düzlemde gösterebilir misin? i sayısı reel kısmı 0 ve sanal kısmı 1 olan bir karmaşık sayıdır. Karmaşık düzlemde şu şekilde gösterilir.

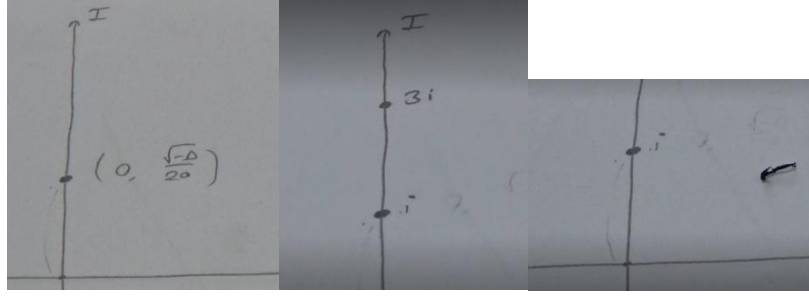
Tabloda görüldüğü üzere, MG'den önce tüm öğretmenler i 'yi ya $\sqrt{-1}$ ya da $i^2 = -1$ olarak tanımlamıştır. Yalnızca Ö2, i 'yi $x^2 + 1 = 0$ ikinci dereceden denkleminin kökü olarak göstermiştir. Ayrıca veriler, öğretmenlerden üçünün karmaşık düzlemde i 'yi geometrik olarak i ifadesini kullanarak gösterdiğini ortaya koymuştur. Buna ek olarak, Ö4 ve Ö5 geometrik olarak i 'nin sanal eksen üzerinde orijinden bir birim uzaklıkta olduğuna işaret etmişlerdir.

Öte yandan, MG sonrası yazılı oturumda Ö2, Ö4 ve Ö5 i 'nin $x^2 + 1 = 0$ ikinci dereceden denkleminin köklerinden biri olduğunu belirtmişlerdir. Açıklamalarında ayrıca $\sqrt{-1}$ 'i i 'ye eşit aldıklarını ifade etmişlerdir. Sadece Ö3, i 'yi "sanal ekseninde (0, 1) noktasına yerleşen sayı" olarak tanımlamıştır. Son yazılı oturumda katılımcıların, "köklerden biri..." ifadesini kullanmaları ve i 'yi karmaşık düzlemde (0, 1) olarak nasıl konumlandıklarını gösteren veriler, $\sqrt{-1}$ 'in esas kök olarak kabul edilmesine rağmen, öğretmenlerin $-\sqrt{-1}$ 'in de $x^2 + 1 = 0$ 'ın başka bir kökü olduğunu bilmeleri gerektiği için önemlidir. Ö4'ün yazılı açıklamasındaki " i ve onun eşleniği $-i$ " ifadesi de bu bilgiye işaret etmektedir.

Benzer şekilde, i 'nin geometrik gösterimi ile ilgili olarak, Ö4 hariç tüm katılımcılar i 'yi karmaşık düzlemde (0, 1) şeklinde bir nokta olarak gösterebilmiştir. MG öncesindeki verilerle karşılaştırıldığında, katılımcıların i 'yi karmaşık düzlemde göstermek için (0, 1) ifadesini kullanmaları bir gelişmeye işaret etmektedir. Ancak Ö4 (0, $\sqrt{-1}$) yazarak bu noktanın sanal eksen üzerindeki $\sqrt{-1}$ birim mesafeyi ifade ettiğini belirtmiştir. Bu nedenle, Ö4'ün, i 'yi karmaşık düzlem üzerine yerleştirme konusunda nasıl bir mantık yürüttüğü sorgulanmıştır.

i 'nin Geometrik Olarak Gösterilmesiyle İlgili Olası Bir Zorluk

Ö4'ün MG sonrası görüşmedeki i 'yi karmaşık düzlemde gösterme ile ilgili akıl yürütmesine ilişkin veriler Ö4'ün yine i 'yi $x^2 + 1 = 0$ ikinci dereceden denkleminin köklerinden biri olarak tanımladığını göstermiştir. Ö4 ayrıca i 'nin, karesi -1'e eşit olan sayı olduğunu belirtmiş ve i 'yi $\sqrt{-1}$ 'e eşit olarak kabul etmiştir. Çiziminden de anlaşılacağı üzere, Ö4, i 'yi önce $(0, \frac{\sqrt{-1}}{2a})$ yazarak ve ardından bir örnek vererek göstermiş olsa da sanal eksen üzerine $3i$ ve i de yazmıştır (Bkz. Şekil 2):



Şekil 2. Ö4'ün i 'yi Geometrik Olarak Gösterimeye Çalışması

Daha sonra tereddüt ederek $3i$ yerine $(0, 3)$ değerini kullanıp kullanamayacağını sorgulayan Ö4, ayrıca i 'nin sanal ekseninde orijinden 1 birim yukarıda olduğunu da ifade etmiştir.

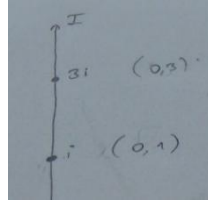
Tartışma aşağıdaki şekilde devam etmiştir:

A: Peki nokta olarak gösterirsen ne olur?

Ö4: Yapamam, bilmiyorum, emin olamıyorum o $(0, 1)$ konusunda.

A: Neden? $(0, 3)$ konusunda da emin değildin, değil mi?

Ö4: Evet, $(0, 3)$ 'ten de emin değildim çünkü bir şeyden bahsettik, mesela mesafe olarak $3i$ ve i diyebileceğimizi söyledik, mesela büyüklük olarak karşılaştıramadık. Evet bu 1 birim mesafe (i ile orijin arasındaki mesafeyi kastediyor) bu 3 birim mesafe (Şekil 2'de $3i$ ile orijin arasındaki mesafeyi kastediyor) ama bunu nokta olarak gösterdiğimde $(0, 3)$ 'ü bir koordinat gibi yazabilir miyim emin değilim.



Şekil 3. Ö4'ün i 'yi $(0, 1)$ ve $3i$ 'yi $(0, 3)$ olarak konumlandığı çizimi

Bu diyalogtaki verilerle beraber Şekil 2 ve Şekil 3 teki çizimleri, Ö4'ün, i 'yi sanal eksen üzerinde $(0, 1)$ noktası olarak göstermekte zorlandığına işaret etmektedir. Orijinden i 'nin bir birim ve $3i$ 'nin 3 birim yukarıda olduğunu ve sanal eksen üzerinde belirli mesafelerde konumlandıklarını fark eden Ö4, $x + iy$ binom formunda, birinci bileşenin $-\frac{b}{2a}$ 'ya eşit olan reel kısma, $\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ 'ya karşılık geldiğini anlamıştır (bkz. Şekil 2). Ayrıca i için, sayısal değerler dikkate alındığında ilk bileşenin 0'a, ikinci bileşenin ise 1'e eşit olduğunu belirtmiştir. Ancak, MG tartışmalarından karmaşık sayıların reel sayılar gibi sıralanamayacağını hatırlamıştır. Bu farkındalık, Ö4'ün $(0, 1)$ 'in orijinden bir birim yukarıda ve birim çember üzerinde olduğunu bilmesine rağmen i 'yi sanal eksen üzerinde $(0, 1)$ olarak temsil etmenin mümkün olup olmadığını sorgulamasına yol açmıştır. Özellikle, i ve $3i$ 'yi temsil etmek için sırasıyla $(0, 1)$ veya $(0, 3)$ kullanırsa, sıralanabildiği bilinen reel sayılar kavramına geri dönmüştür (örneğin, 1, 3'ten küçüktür). Daha da önemlisi, i 'yi temsil etmek için $\mathbb{R}^2$ üzerinde gösterildiği gibi $(0, 1)$ kullanırsa, bunun karmaşık sayıların sıralanamayacağı anlayışıyla çelişebileceğini anlamıştır. Sonuç olarak, $3i$ 'yi $(0, 3)$ olarak ifade edip edemeyeceğinden emin olamamıştır. Sanal eksen üzerindeki noktaların sanal sembollerle temsil edilmesi gerektiğini düşünmüş olabilir.

Karmaşık düzlemde daha önce çizdiği kökler üzerine düşünmesi istendiğinde, Ö4 karmaşık sayıların sıralı reel sayı çiftleri olarak temsil edilebileceğini hatırlamıştır. Bu farkındalık, $x + iy$ binom formunu Karmaşık düzlemde (x, y) olarak temsil etmesini sağlamıştır. Böylece i 'yi $(0, 1)$ olarak ifade etmesi mümkün olmuştur. Bu ilerlemeye rağmen Ö4, i ve $3i$ 'nin büyüklüklerini karşılaştırmakta zorlanmaya devam etmiş, bu da karmaşık sayıların büyüklüklerini tam olarak anlamadığını

göstermiştir. Ö4'ün reel ve karmaşık sayıları sıralama özelliğine göre karşılaştırma girişimlerinin, $\mathbb{R}^2$ ve Karmaşık düzlem açısından bakıldığında kavramsal olarak geçersiz olması önemlidir. Sayıların sıralı bir şekilde düzenlenebildiği reel sayı sisteminin aksine, $\mathbb{R}^2$ veya Karmaşık düzlemde böyle bir sıralama mevcut değildir. Bu sınırlı anlayış, Ö4'ün bildiği reel sayı kavramlarını karmaşık sayıların daha soyut yapısına uygunsuz bir şekilde uyguluyor olabileceğini düşündürmektedir.

i ve *b* nin Operator Olarak Anlamı

Cebirsel ve Geometrik Olarak *i*'nin Kuvvetleri

İlk ve son yazılı oturumda katılımcıların i^2 'yi cebirsel ve geometrik olarak açıklamaları istenmiştir. Tablo 4'teki verilerden anlaşıldığı üzere, ilk yazılı oturumda bazı öğretmenlerin cevapları i^2 'yi -1'e eşit olarak yazıp ifade edebilmelerine rağmen geometrik olarak Karmaşık düzlemde nasıl göstereceklerini bilmediklerine işaret etmektedir. Özellikle i^2 'nin geometrik anlamı için Ö5 dışındaki katılımcılar "bilmiyorum" demişler ya da yanıt vermemişlerdir. Buna ek olarak, Ö1'in soruya cevap verip vermediğini ya da *i*'yi hem cebirsel hem de geometrik olarak açıklayıp açıklamadığını anlaşılmadığı için cevabı yetersiz olarak değerlendirilmiştir. Buna karşın, son yazılı oturumda tüm katılımcılar *i*'nin kuvvetlerini, cebirsel olarak $i = \sqrt{-1}$ olduğunu da belirterek açıklayabilmiştir. Ayrıca hepsi *i*'nin geometrik olarak saat yönünün tersine 90 derecelik bir dönüşü ifade ettiğini düşünmüştür.

Tablo 4. Öğretmenlerin MG Öncesi ve Sonrası i^2 ve *i*'nin kuvvetlerinin Cebirsel ve Geometrik Anlamlarına İlişkin Yanıtları

<i>i</i> 'nin kuvvetlerini ifade etme	MG Öncesi	MG Sonrası
Cebirsel anlamın kullanımı	Ö1: $i = \sqrt{-1}$ that's why we show it as I did in option a. Ö1: $i = 1 \cdot i$. Bu nedenle, aşağıdaki şekilde gösteriyoruz. Please algebraically and geometrically explain i^2. Justify your answer. $i = \sqrt{-1}$ $i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ $= -1$ Ö2: I do not know. Ö3: Bilmiyorum. Ö4: Boş bırakmıştır. Ö5: Algebraically, $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ Ö5: Cebirsel olarak, $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$	Algebraically it is $i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$. Geometrically it is the point $(-1, 0)$ on the complex plane that is to say it is on the real line. Ö1: Cebirsel olarak $i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ dir. Geometrik olarak karmaşık düzlemde $(-1, 0)$ noktasıdır, yani reel eksen üzerindedir. $i = \sqrt{-1}$ $i^2 = -1$ $i = \sqrt{-1}$ $i^2 = -1$ $i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$ $i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = 1$ Ö5: Cebirsel olarak $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ dir.
Operatör anlamının kullanımı	Ö1: Boş bırakmıştır. Please algebraically and geometrically explain i^2. Justify your answer. i is a 90° counter-clockwise rotation. Ö2: Bilmiyorum. Ö3: I do not know. Ö3: Bilmiyorum. Ö4: Boş bırakmıştır. Geometrically, $i^2 = -1$ is a number where imaginary part is 0 and real part is -1. Ö5: 1. On complex plane, the number will be at -1 on real(x) axis. Ö5: Geometrik olarak $i^2 = -1$ sanal kısmı 0 ve reel kısmı -1 olan bir sayıdır. Karmaşık düzlemde, sayı reel (x) ekseninde -1'de olacaktır.	Geometrically it is the point $(-1, 0)$ on the complex plane that is to say it is on the real line. Ö1: Geometrik olarak, Karmaşık düzlemde $(-1, 0)$ noktasıdır. Yani, reel eksen üzerindedir. $i = \sqrt{-1}$ $i^2 = -1$ $i = \sqrt{-1}$ $i^2 = -1$ $i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$ $i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = 1$ Ö2: <i>i</i> dönmeye operatörü gibi davranır. $i = \sqrt{-1}$ $i^2 = -1$ $i = \sqrt{-1}$ $i^2 = -1$ $i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$ $i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = 1$ Ö3: <i>i</i> ile <i>i</i>'yi her çarpışımızda, pozitif yönde 90 derecelik bir dönüş meydana gelir. $i = \sqrt{-1}$ $i^2 = -1$ $i = \sqrt{-1}$ $i^2 = -1$ $i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$ $i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = 1$ Ö4: i^2, <i>i</i> saat yönünün tersine 90° döndürüldüğünde elde edilir. Geometrically, $i^2 = -1$ is a number where imaginary part is 0 and real part is -1. Ö5: On complex plane, the number will be at -1 on real(x) axis. Ö5: Geometrik olarak $i^2 = -1$ sanal kısmı 0 ve reel kısmı -1 olan bir sayıdır. Karmaşık düzlemde, sayı reel (x) ekseninde -1'de olacaktır.

Karmaşık Sayı Yanlılığı

Görüşme sırasında, Ö1 hariç tüm katılımcılar hem cebirsel hem de geometrik olarak nasıl akıl yürüttüklerine dair geçerli açıklamalar sunmuşlardır. Ö1 karmaşık sayıların çarpımının sadece operatör değil aynı zamanda genişleme anlamlarından da bahsedebilmiştir. Ancak i hakkında cebirsel olarak akıl yürütürken yaptığı açıklamalar karmaşık sayı yanlılığına işaret etmektedir. Örnek olarak, Ö1 ile karşılaştırmak için Ö5'in i hakkında cebirsel akıl yürütmesine ilişkin verileri de sunuyoruz.

Görüşmede i^2 'yi nasıl yorumladıkları sorulduğunda, Ö5 aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

Ö5: Çünkü i , $\sqrt{-1}$ 'e eşitti. Dolayısıyla i^2 dediğimiz sayı $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ oldu. Bu da bize -1 sayısını verdi. -1 reel bir sayıdır. Yani bunu karmaşık sayı olarak $x + iy$ biçiminde yazarsak 0 +, pardon, $-1 + 0i$ olur. Bu yüzden bunu bir sayı olarak, x ekseninde, 0'dan 1 birim uzaklıkta, sol tarafta, negatif tarafta bir nokta olarak gösterebileceğimizi söyledim. Yani doğrudan reel eksen üzerinde olacağını söyledim.

Alıntıda görüldüğü üzere Ö5, i^2 'nin -1'e eşit olduğunu doğrulayabilmiştir. Karmaşık sayıların kartezyen formu olan $x + iy$ 'yi $-1 + 0i$ olarak ifade etmesi ve -1'i cebirsel olarak kartezyen formun bir parçası olarak düşünmesi, Ö5'in sadece reel sayıların karmaşık sayıların bir parçası olduğunu fark etmekle kalmayıp aynı zamanda bir sayı olarak -1'in orijinden 1 birim uzaklığa karşılık geldiğini de bildiğini göstermiştir. Bu da i 'nin bir kuvveti hakkında nicel muhakeme yapabildiği anlamına gelebilir. Ancak, Ö5 $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ 'i nereden bildiğini ya da bu eşitliği nasıl çıkarabildiğini açıklamamış ve görüşmeyi yürüten araştırmacı da nasıl akıl yürüttüğünü açıklamaları için onu daha fazla sorgulamamıştır. Ö5'in i 'nin, karesi -1 olan sayı olduğuna ilişkin önceki açıklamaları böyle bir eşitlik yazabilmesinin nedeni olabilir.

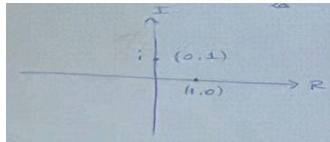
Öte yandan, Ö1'in i^2 ile ilgili açıklamaları karmaşık sayı yanlılığına işaret etmektedir:

Ö1: i 'nin karesini (i^2) cebirsel olarak yazalım. Cebirsel olarak i ile i 'nin, kök eksi bir ile kök eksi birin çarpımıdır ($\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$). Reel sayılardaki kurallarımız burada da geçerlidir. İki sayıyı tek bir kök içinde çarpabiliriz. Kök bir ($\sqrt{1}$) olur. Yani bir. Nereye koyacağız? Sonuç bir reel sayıdır, yani iki sanal şeyi çarptık ve cevap reel çıktı. O zaman reel üzerinde göstereceğim (Bkz. Şekil 4)

$$\begin{aligned} i^2 &= i \cdot i \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \\ &= \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

Şekil 4. Ö1'in i^2 ile ilgili yazılı açıklaması

Burada bir yerde (Şekil 5'e atıfta bulunuyor), bu şeyleri eşit yapmaya çalışıyorum. i kare (i^2) (1, 0)'da olacak değil mi? Evet, öyle olacak. Çünkü i kare (i^2) pozitiftir. Yani, bence altına i kare (i^2) yazamayız ((1, 0) noktasını nasıl etiketleyeceğimizden bahsediyor) çünkü bu i kare (i^2)'dir. Bu, (1, 0). Bir dakika, i 'nin karesi eksi bir olur, değil mi? Beynim yanyor şimdi. Bir dakika. i 'yi i ile çarptım, yani i 'nin karesi. i 'nin karesi eksi bir olmalı. Pardon böyle olmayacak. Bu eksi bir olacak.



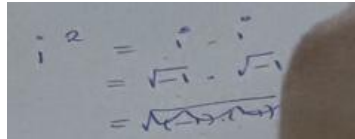
Şekil 5. Ö1'in i 'yi Karmaşık düzlemde yerleştirilmesi

Verilerin gösterdiği gibi, Ö1 reel sayılarda kullanılan kurallarla akıl yürüterek, reel sayılarda $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ eşitliğinin karmaşık sayılar için de geçerli olduğunu düşünmüştür. Bu da öğretmenin karmaşık sayı yanlılığına sahip olduğunu düşündürmektedir. Çünkü a ve b 'nin her ikisi de pozitif veya

en az biri negatif veya sıfır ise $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ eşitliği sağlanır. Ancak, a ve b 'nin her ikisi de negatifse $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$ olur. Öte yandan Ö1, i 'yi karesi -1 olan sayı olarak düşündüğünde kendini düzeltmiştir. Araştırmacının Ö1'in nasıl düşündüğünü sorması ile tartışma daha ilginç bir hal almıştır. Ö1 reel sayılardan bir örnek vererek, $\sqrt{2}$ ile $\sqrt{2}$ 'yi çarparak kendini düzeltmiş ve $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ in 1'e eşit olacağını söylerken yanlışlığı sonucuna varmıştır. Hatta i^3 hakkında yorum yaparak ve Karmaşık düzlemde (0, -1)'e eşit olacağını belirtmiştir. Aşağıdaki soru ile konuşma devam etmiştir:

A: Tamam. Burada fikrini neden değiştirdiğini tekrar söyler misin?

Ö1: Burada fikrimi şundan dolayı değiştirdim: Bu reel bir şey değil ($\sqrt{-1}$ 'e atıfta bulunarak). i negatif bir sayı değil. i kök eksi bir gibi bir şey (Bkz. Şekil 6). Bu yüzden fikrimi değiştirdim. Çünkü i -1 sayısı olsaydı, karesi zaten 1 olarak çıkacaktı. Orada bir problem yok. Ama bu zaten kök -1 olarak tanımlanıyor, normalde böyle bir şey yok. Ama kökün içinde iki tane ifade var. İkisi de aynı. Sanki kökler birbirini iptal etmiş gibi. Yani bir kareye dönüşmüş gibi. Bu yüzden fikrimi değiştirdim. Çünkü bunu yaparsam -1'in karesini alıyormuşum gibi olacak. O zaman sanki böyle  tanımlamışım gibi olacak. Ama öyle  değil.



Şekil 6. Ö1'in i^2 ile ilgili cebirsel açıklaması

Reel sayılardan bir örnek veren Ö1, negatif olmayan herhangi bir reel sayı için $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ olduğunu düşünmüş ve $\sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)}$ sonucunun -1 olduğunu açıklamıştır. Ancak, bu noktada açıklamaları hala negatif olmayan reel sayılarda geçerli olan kurallarla ilgilidir. Yani, açıklamaları matematiksel olarak geçerli değildir ve geçerli bir kanıt sunmamıştır. Özetle, Ö1'in açıklamaları, kök işareti ile ilgili hem reel hem de karmaşık sayılarda aynı özelliklerin geçerli olduğunu düşündüğüne işaret etmektedir.

ib' nin Farklı Anlamları

Daha önce de belirtildiği gibi, MG sonrası tüm katılımcılar i 'nin i ile çarpılmasının saat yönünün tersine 90 derecelik bir dönüşü işaret ettiğini belirtmiştir. Bu bölümde, bir katılımcının sadece döndürme operatörü hakkında değil aynı zamanda karmaşık sayılarda çarpmanın genişletme operatörü anlamları hakkında nasıl akıl yürüttüğünü göstermek için, Ö1'in verileri örnek olarak sunulmaktadır. Aşağıdaki verilerin de gösterdiği gibi, Ö1, karmaşık sayıların kartezyen formunda $x + iy$, x 'in $\frac{-b}{2a}$ 'ya ve y 'nin $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ya karşılık geldiğini bilmektedir. Buna ek olarak, Ö4 ile Ö1'in ib hakkında akıl yürütmelerini karşılaştırmak için Ö4'ün çarpma işleminin tekrarlı toplama anlayışını düşünüyor ve aktarıyor gibi görüldüğü veriler de sunulmaktadır.

Ö1 ile tartışma $\sqrt{-1} \cdot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ 'nın anlamı üzerine şu şekilde devam etmiştir:

A: Bu i kere $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Ö1: Nerede mi olacak?

A: Neye karşılık geliyor, evet, o sayı nerede olacak?

Ö1: Burada (sanal eksen üzerinde bir noktayı gösteriyor). Sanal eksen üzerinde. Katsayının değerine bağlı. Örneğin, $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ 3 ise, $3i$ 'yi işaret edeceğim. Ya da $-3i$ 'yi işaret edeceğim gibi. Bu reel bir sayı değil (i 'yi kastediyor), ancak reel bir katsayısı var. Buna göre büyüdüğünü ya da küçüldüğünü söyleyebilirim. Büyüyor ya da küçülüyor demek çok doğru olmayabilir, dediğim gibi i 'nin tanımından dolayı i , $3i$ 'den büyük mü gibi olmayabilir ama uzaklığını sıfıra olan uzaklık olarak varsayabiliriz ve yerleştirebiliriz (reel sayı çarpı i 'den bahsediyor). Bu pozitif olduğu için yerleştirebiliriz.

A: Tamam. Bana diyorsun ki... i ile çarptığımda ib 'yi buraya (sanal eksenini göstererek) yerleştirebileceğimi söylüyorsun. Ben de sana $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ 'nın i ile çarpımını açıklayabilir misin diye soruyorum.

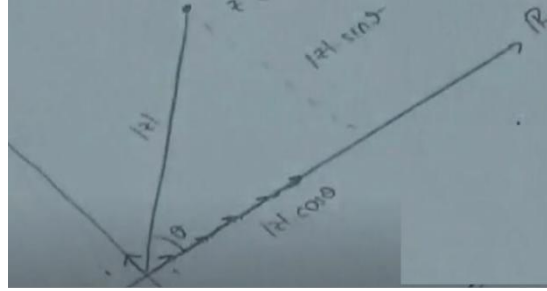
Ö1 bu noktada düşünmeye devam ederek, bir reel sayıyı i ile çarpmanın geometrik anlamını ifade etmekte zorlandığı izlenimini vermiştir. Hatta $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ifadesini i ile çarptığında $-\frac{b}{2a}$ 'nın sıfır olduğunu düşünmüş ve $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ i 'nin sanal ekseninde olduğunu bilmıştır. Araştırmacı iki kez daha kendisinden reel bir sayıyı i ile çarpmanın ne anlama geldiğini açıklamasını istedikten sonra Ö1 aşağıdaki yanıtı vermiştir:

Ö1: Tamam, mesela $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ bu doğrunun üzerindeydi (reel sayı eksenini kastediyor). Çünkü reeldi. Onu i ile çarptığım zaman dönüyorsa ne diyeyim? Bu tarafa gitti. Sanal eksene geçti. Döndü, döndü. Buradan (yani reel sayı ekseninden) buraya (yani sanal eksene) döndü. Doksan derece döndü, evet.

Veriler, Ö1'in başlangıçta $\sqrt{-1} \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ifadesini, i 'nin bir bir reel sayı ile çarpılması olarak yorumladığını ve burada i 'yi döndürme operatörü olarak görmek yerine, skaler ile çarpıma odaklandığını ortaya koymuştur. Bu yorumuna, ifadenin sentaktik yapısı yol açmış olabilir; çünkü sembolik olarak çarpma sırası, reel sayının i üzerine etki ettiği izlenimini yaratmaktadır. Ö1, $\sqrt{-1}$ 'i çarpılan ve $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ 'yı çarpan olarak görerek, reel sayının i 'yi sanal eksen boyunca uzattığını veya kısalttığını düşünmüş olabilir. Bu anlayışın oluşmasını birkaç faktör etkilemiş olabilir. Birincisi, görüşme sırasında Ö1 karmaşık sayıların Kartezyen formunu sürekli olarak vektörlerle ilişkilendirmiştir. Özellikle i 'yi açıkça (0,1)'e karşılık gelen bir birim vektör olarak tanımlamış ve $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ 'yı orijine olan uzaklık olarak anlamlandırmıştır. Bu vektör temelli yorumlama, Ö1'in i 'nin katlarını sanal eksen üzerinde noktalar şeklinde konumlandırmasına olanak sağlamıştır. İkincisi, $\frac{-b}{2a}$ 'yı sıfır olarak ifade etmiş ve $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ 'yı reel bir sayı olarak tanımlamıştır. Bu durum, Ö1'in bu akıl yürütmesini ikinci dereceden denklemlerin karmaşık köklerinin geometrik yorumuyla ilişkilendirdiğini, $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ 'yı ise i 'yi genişleten bir skaler olarak algılamasını güçlendirmiştir. Öte yandan veriler Ö1'in, i 'yi döndürme operatörü olarak düşünmekte zorlandığını göstermektedir. Ancak araştırmacının bu ayrıma dikkatini açıkça ve tekrar tekrar yöneltmesi sonucunda Ö1, i 'nin çarpan olarak geometrik anlamını kabul etmiştir. Bu yönlendirme sonrası, reel bir sayının i ile çarpılmasının sayıyı 90 derece döndürerek sanal eksen üzerine konumlandığını ifade etmiştir. Bu kavramsal farkındalık, Ö1'in reel sayıların i ile çarpımını hem bir genişletme hem de bir döndürme işlemi olarak düşünebildiğini, ancak ikinci perspektifi ifade etmek için dışarıdan yönlendirmeye ihtiyaç duyduğunu ortaya koymaktadır. Daha da önemlisi, Ö1'in $3i$ 'deki 3'ü sıfıra olan uzaklık ve $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} i$ 'daki $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ifadesini ise reel sayı doğrusu üzerindeki bir uzaklık olarak düşünmesi, onun karmaşık sayıların kartezyen biçimi $x + iy$ 'nin iy bileşenine ilişkin nicel muhakeme yapabildiğini göstermektedir. Bu şekilde düşünmesi, karmaşık düzlemde i 'yi (0, 1) ve y 'yi (0, y) noktalarında konumlandırabilmesini mümkün kılmıştır. Bu da Ö1'in, bir reel sayı ile i 'nin çarpımını hem bir döndürme hem de bir genişletme işlemi olarak anlayıp açıklayabilmesine olanak tanımıştır.

Öte yandan, Ö4 kutupsal form hakkında düşünürken $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} i$ hakkında aşağıdaki gibi akıl yürütmüştür:

Ö4: Tamam, buna 1 diyeceğim (bkz. Şekil 7). $|z|\cos\theta$ kadar 1 vektörünü ekliyorum ve x bileşenini buradan yapıyorum, binom formunda ifade ettiğimde $|z|\cos\theta$ oluyor. Sonra bunu buraya uygulayabiliyorum, mesela i , yi kadar (ekleyerek). Oradaki birimleri birleştirdiğimde, $|z|\sin\theta$ orada, bu sefer yi elde ediyorum. O y 'yi $|z|\cos\theta$ kadar hareket ettirip sonuna eklediğimde, örneğin bu noktaya varıyorum (karmaşık sayının yerini gösteriyor) ve orada da $|z|\sin\theta$ olarak gösterebiliyorum (şekil 7'deki noktalı çizgileri gösteriyor).



Şekil 7. Ö4'ün $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} i$ nin tekrarlı toplamasını $i|z|\sin\theta$ 'ye atıfta bulunarak ifade etmesi

Veriler bazı önemli sonuçlara işaret etmektedir: İlk olarak, Ö1'in akıl yürütmesine benzer şekilde, Ö4'ün i 'yi sanal ekseninde 1 birim olarak görmesi, karmaşık sayıların Kartezyen formu olan $x + iy$ 'nin iy bileşenini nicelik olarak düşündüğü anlamına gelebilir. Ö4 özellikle, y 'nin $|z|\sin\theta$ ya eşit olduğu durumda, $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} i$ 'nin sanal eksen üzerinde bir mesafe olarak düşünüyor gibi görünmektedir. Daha da önemlisi, Ö1'in akıl yürütmesiyle karşılaştırıldığında, Ö4'ün $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} i$ ile ilgili yorumu, Ö4'ün x bileşenini oluşturmak için reel ekseninde $(1,0)$ vektörünü tekrar tekrar eklerken, $x + iy$ 'nin y bileşenini oluşturmak için sanal ekseninde $(0, 1)$ vektörünü tekrar tekrar eklediğini göstermiştir. Kısacası, veriler bir reel sayının i ile çarpılmasıyla ilgili olarak Ö1'in genişletme operatörü anlamına dair muhakeme yaptığını, Ö4'ün muhakemesinin ise tekrarlı toplama ile çarpmayı içerdiğini göstermektedir. Veriler ayrıca Ö4'ün x bileşenini $(1, 0)$ ve y bileşenini $(0, 1)$ birim vektörlerinin tekrarlı toplamalarından oluşan vektörler olarak anlamlandırmasının $x + iy$ 'yi vektör toplamı olarak düşünmesini sağladığına da işaret etmektedir.

Tartışma ve Öneriler

Çalışmanın bulguları, karmaşık sayıların çeşitli formları arasındaki bağlantılara odaklanan bir MG'yi tamamladıktan sonra, öğretmenlerin i yi hem cebirsel hem de geometrik olarak yorumlayabilir hale geldiklerini ortaya koymuştur. Spesifik olarak, sonuçlar, MG'den önce hiçbir öğretmenin i 'yi $x^2 + 1 = 0$ denkleminin köklerinden biri olarak ifade edemediğini, MG'nin tamamlanmasının ardından tüm katılımcıların i 'yi yalnızca esas kök olarak tanımakla kalmayıp aynı zamanda onu bir vektör ve Karmaşık düzlemde bir nokta olarak kavramsallaştırdığını göstermiştir. Ayrıca, tüm öğretmenler i 'yi bir döndürme operatörü olarak tanımlayabilmiştir. Buna ek olarak, bir katılımcı ib 'yi hem i 'nin b üzerinde 90 derecelik bir dönme gerçekleştirmesi hem de b 'nin i üzerinde bir genişletme operatörü olarak hareket etmesi olmak üzere iki farklı şekilde yorumlayarak daha ileri bir anlayış sergilemiştir. Diğer yandan, bir başka katılımcı ib 'yi birim vektörün $(0, 1)$ tekrarlı toplanmasıyla açıklayabilmiştir. Sonuçlar ayrıca bir öğretmenin $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ 'nin cebirsel anlamı konusunda yanılgılı düşündüğüne işaret etmektedir. Buna ek olarak, daha önceki araştırmalardan farklı olarak, veriler öğretmenlerin karmaşık sayıları ikinci dereceden denklemlerin köklerinin niceliği olarak düşünürken yaşadıkları zorlukların üstesinden kendi başlarına nasıl gelebildiklerini ya da gelemediklerini göstermiştir. Bu çalışma sadece beş öğretmen ile yürütülmüş olsa da, sonuçlar öğretmenlerin i ve ib 'nin farklı anlamlarını nasıl kavramsallaştırdıklarına dair bazı önemli içgörülere işaret etmektedir. Aşağıda, çalışmanın sonuçları tartışılırken, aynı zamanda i 'nin cebirsel ve geometrik anlamları üzerine daha fazla araştırma yapılması ve bunların öğretilmesi için çıkarımlara da işaret edilmektedir.

i'yi Karmaşık Düzlemde Bir Nokta Olarak Tanımlama ve Gösterme

Sonuçlar Ö2, Ö4 ve Ö5'in i yi $x^2 + 1 = 0$ ikinci dereceden denkleminin köklerinden biri olarak tanımladığını göstermiştir. Örneklendirildiği gibi, Ö4 cebirsel olarak da $\pm i$ yi iki kök olarak işaret etmiştir. Buna ek olarak, Şekil 7'de görüldüğü üzere, bulgular, Ö1'in karmaşık düzlemde $x^2 + 1 = 0$ denkleminin köklerinden biri olarak i 'nin farkındalığına sahip olduğunu özellikle göstermiştir. Bu sonuçlar, araştırmacıların i 'nin öğrenciler ve öğretmenler tarafından -1 'in kareköklerinden biri olarak kavramsallaştırılması gerektiğini vurguladığı önceki araştırmaları önemli ölçüde genişletmektedir (Kontorovich, 2018b; Nachlieli ve Elbaum-Cohen, 2021) çünkü hem öğretmenlerin hem de öğrencilerin, karekök işaretinin farklı sayı kümelerindeki yorumlarının farkında olmaları gerekmektedir (Kontorovich, 2018b). Bununla birlikte, sonuçlar aynı zamanda katılımcıların hepsinin $\sqrt{-1}=i$ olarak ifade ettiklerini göstermiştir. Formal matematikte i , $x^2 + 1 = 0$ denkleminin esas kökü olarak kabul edildiği için, öğretmenlerin bu kavramsallaştırmaları geçerli kabul edilebilir (örneğin, Kontorovich, 2018b; Usiskin vd., 2003).

Veriler özellikle, öğretmenlerin cebirsel işlemlerin ötesine geçerek $x^2 + 1 = 0$ denkleminin köklerini karmaşık sayıların, reel katsayılı herhangi bir ikinci dereceden denklemin köklerinin nicelleştirilmesi anlayışlarıyla ilişkilendirebildiklerine işaret etmektedir. Yani, özellikle Ö4'ün Tablo 3 ve Şekil 2 ve Şekil 7'deki verilerinde ve Ö1'in açıklamalarında gösterildiği gibi, i ve ib dikkate alındığında, her iki katılımcı da $-\frac{b}{2a}$ 'ın sıfıra eşit olacağını belirttikleri $(-\frac{b}{2a}, \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})$ sayısal değerlerine geri dönmüşlerdir. Bu durum, ikinci dereceden kök formülünü nicelik olarak kavrayabildiklerini (Stevens, 2019) ve $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ 'ı 0'dan dikey uzaklık gibi düşündüklerini göstermiştir. Bu durum ayrıca $(-\frac{b}{2a}, \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})$ 'yı hem $((-\frac{b}{2a}, 0)$ ve $((0, \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}))$ 'ın birleşimi olarak hem de i 'yi $(0,1)$ noktasal gösterimine sahip bir vektör olarak düşünebildiklerini göstermiştir. Bu da i 'yi iki niceliğin birleşimi olan çarpımsal bir nesne (Thompson vd., 2014) olarak algıladıklarını göstermektedir. Bu durum özellikle Ö4'ün i 'yi Karmaşık düzlemde konumlandırırken yaşadığı zorluğun üstesinden gelmesinde açıkça görülmüştür. Aslında bu, katılımcının $(0,1)$ ve $(0,3)$ gibi noktaların ikinci dereceden bir denklemin köklerinden birine atıfta bulunduğunu düşündüğünde, i 'yi $(0,1)$ olarak göstermek için sıralı reel sayı çiftlerini kullanabileceğini hatırladığını da göstermektedir. Yine de, $x^2 + 1 = 0$ 'ın bir kökünü bulmak için $(0, \sqrt{-1})$ 'nin kullanılması öğrenenler açısından doğal bir eğilim olabilir. Bunu göz önünde bulundurarak, bu çalışmada, ikinci dereceden denklemleri öğretirken, köklerin hem cebirsel hem de geometrik anlamlarının eşzamanlı olarak kullanılması önerilmektedir. Özellikle, hem öğretmenlere hem de öğretmen eğitimcilerine, öğrencilerine köklerin $\mathbb{R}^2$ 'de yatay ekseninde sıralı ikililer olarak noktasal temsiliyi düşünmeleri için fırsatlar sunmaları önerilmektedir.

Bu bulgular, $\mathbb{R}^2$ 'nin nicel bir yapı olarak düşünülmesinin, Karmaşık düzlem ile $\mathbb{R}^2$ arasındaki izomorfizmanın daha net bir şekilde anlaşılmasını destekleyebileceğini göstermektedir. Bu durum, özellikle Ö4'ün yaşadığı zorluk göz önüne alındığında önem kazanmaktadır; zira bu zorluk, $\mathbb{R}^2$ 'deki her bir sıralı sayı çiftinin bir ve yalnız bir karmaşık bir sayıya karşılık geldiğini yani bu iki yapı arasındaki bire bir eşleme ilişkisi olduğunu (Kontorovich vd., 2021) fark etmemiş olabileceğini göstermektedir. Bu nedenle, öğretmen ve öğrencilerin $\mathbb{R}^2$ 'yi öncelikle nicel olarak kavramsallaştırmaları (Karagöz Akar, Zembat vd., 2022), noktaları sadece statik konumlar olarak değil, çarpımsal nesneler olarak ele almaları için fırsatlar yaratılmasını savunmaktayız (Saldanha ve Thompson, 1998; Stevens ve Moore, 2017; Thompson vd., 2017). Bu yaklaşım, öğrenenlerin Kartezyen düzlem ile Karmaşık düzlem arasındaki yapısal eşdeğerliği algılama becerilerini geliştirebilir.

Sonuçlar ayrıca Ö1'in reel sayılarda $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$ kuralının karmaşık sayılar için de geçerli olduğunu düşündüğünü göstermiştir ki, bu da bir karmaşık sayı yanlılığına işaret etmektedir (Karagöz Akar vd., 2023b; Kontorovich, 2018a). Buna ek olarak, Ö5, $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ 'in -1 'e eşit olduğunu doğrulayabilmesine rağmen, bu konuda geçerli bir açıklama yapıp yapamayacağı konusunda bir sonuca varmak için yeterli veri bulunmamaktadır. Öte yandan, Ö1, $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ konusundaki zorluğunu gidermek için bir açıklama yapabilmiş olsa da, açıklaması karmaşık sayı yanlılığını daha da açığa çıkarmıştır. Bu nedenle, Nachlieli ve Elbaum-Cohen'in (2021) önerisine uygun olarak ve kök işaretinin çok anlamlılığına vurgu yaparak (Kontorovich, 2018a), öğretmenlere ve öğretmen eğitimcilerine, karmaşık sayıların farklı formlarını öğretirken ve araştırırken, i 'nin -1 'in kareköklerinden biri olan esas kök olarak dikkate alınmasının önemi hakkında bir tartışma yapılmasını öneriyoruz.

Döndürme ve Genişletme Operatörleri Olarak i ve b 'nin Anlamı

i ile çarpma işlemine ilişkin bulgular, önceki araştırmalarla (Nemirovsky vd., 2012; Soto-Johnson ve Troup, 2014) tutarlılık göstermekte ve onları genişletmektedir. Tüm öğretmenler i 'yi 90 derecelik bir döndürme operatörü olarak yorumlayabilmiş ve bu da öğretmenlerin Karmaşık düzlemde i 'nin kuvvetlerini görselleştirebilmelerini sağlamıştır. Dikkat çeken bir bulgu, bir öğretmenin (Ö1) ib 'nin hem döndürme hem de genişletme anlamlarının farkına vararak daha gelişmiş bir kavramsallaştırma sergilemesidir. Bu öğretmen özellikle, i 'yi çarpan ve b 'yi çarpılan olarak görebilmenin yanı sıra, bunun tersini de yapabilmektedir. Öte yandan, Ö4'ün akıl yürütmesi, ib 'yi yorumlarken çarpmanın tekrarlı toplama anlamını kullandığını göstermiştir. Ö1'in ib 'yi ikili olarak yorumlaması, karmaşık sayıların geometrik ve cebirsel anlamları arasındaki bağlantıyı daha derinlemesine anladığını gösterirken, tekrarlanan toplama işlemi daha fazla araştırılması gereken sınırlı bir anlamaya işaret etmektedir.

Önceki çalışmalar, sınıf zemini gibi fiziksel ortamların, öğretmen adaylarının bir karmaşık sayıyı i ile çarpma işlemiyle daha iyi anlamalarına yardımcı olarak onların i 'yi 90 derecelik bir döndürme operatörü olarak yorumlamalarını sağladığını göstermiştir (Nemirovsky vd., 2012). Ancak, Soto-Johnson ve Troup (2014), iki matematik lisans öğrencisinin, karmaşık sayıların çarpımının hem dönme hem de genişleme içerdiğini fark etmelerine rağmen kavrayışlarının eksik kaldığını ortaya koymuştur. Bu öğrenciler, çarpmanın geometrik anlamını sözel olarak açıklayabilmelerine karşın, geometrik yorumu cebirsel temsillerle ilişkilendiren diyagramları oluşturmada güçlük çekmişlerdir. Benzer şekilde, bu çalışmada Ö1 çarpan olarak i 'nin herhangi bir b reel sayısı üzerinde saat yönünün tersine 90 derece döndürerek işlem yapabileceği bilgisini hatırlamakta güçlük çekmiştir. Tekin (2019) çalışmasında bir öğretmen adayının karmaşık sayıların çarpımına ilişkin anlam geliştirmesini hem döndürme hem de genişletmeye ayrı ayrı ve birlikte odaklanmıştı. Ancak onun çalışmasındaki katılımcı, hali hazırda i 'nin bir reel sayı ile çarpımını hem döndürme hem de genişletme operatörü olarak yorumlayabiliyordu. Öğrencilerin hem çarpan hem de çarpılan anlamları doğrultusunda i 'yi reel bir sayıyla çarpma anlayışını nasıl geliştirdiklerini incelemek için daha fazla araştırmaya ihtiyaç vardır. Öğretim deneyleri gibi klinik tasarım-tabanlı araştırma çalışmaları, bu ikili anlamın nasıl ortaya çıktığına dair daha derin içgörüler sağlayabilir.

Çarpma işleminde döndürme ve genişletmenin operatör anlamlarını dikkate almak çok önemlidir, çünkü yapılan araştırmalar iki akıl yürütme modeli tanımlamaktadır: tekrarlı toplama ve çarpımsal akıl yürütme. Tekrarlı toplama modeli sınırlı ve ilkel olarak görülürken (Fischbein vd., 1985), çarpımsal akıl yürütme çarpmayı "kat olarak" anlamayı içerir (Thompson ve Saldanha, 2003). Bu ileri düzey akıl yürütme, çarpımı hem çarpan hem de çarpılan ile ilişkili olarak tanımayı gerektirir (Karagöz Akar, Watanabe vd., 2022). Buna ek olarak, önceki çalışmalar öğretmen adaylarının çarpma işlemiyle çarpımsal olarak kavramakta sıklıkla zorlandıklarını göstermektedir (örn., Karyağdı, 2022). Bu çalışmadan elde edilen bulgular, özellikle de Ö1'in i 'yi hem çarpan hem de çarpılan anlamlarıyla yorumlama becerisi ve Ö4'ün tekrarlı toplama anlayışı, çarpma işlemiyle ilgili araştırmaların karmaşık sayılar alanına genişletilmesi gerektiğini göstermektedir. Öğrencilerin i 'nin reel sayılarla çarpımını nasıl kavramsallaştırdıklarının araştırılması, yeni muhakeme modellerini ortaya çıkarabilir ve bu tür bir anlayışın nasıl geliştiğini açıklığa kavuşturabilir. Öğretmenlerin açıklamaları, i ile çarpma işleminin ikili yorumunun, ikinci dereceden köklerin nicelik olarak anlaşılması, vektörlerle ilişkileri ve Karmaşık düzlemin nicelik olarak kavramsallaştırılması ile bağlantılı olabileceğini gösterdiğinden, bu yönde yapılacak araştırmalar özellikle önemlidir.

Yukarıdaki tartışmayla bağlantılı olarak, sonuçlar aynı zamanda en az iki öğretmenin (Ö1 ve Ö4), ib 'yi tek bir nicel varlık (nicelik) olarak algıladığına işaret etmektedir. Bu durum, Ö1'in hem ikinci dereceden köklere ilişkin cebirsel forma işaret ederek ib 'yi karmaşık düzlemde noktalar olarak göstermesinde hem de çarpma işlemiyle kullanarak ib hakkında akıl yürütmesinde gözlemlenmiştir. Benzer şekilde, Ö4'ün ib 'yi birim vektör i 'nin tekrarlı toplamı olarak düşünmesi de aynı durumun göstergesidir. Dolayısıyla, ib 'nin tek bir nicelik olarak kavranmasının cebirsel bir bakış açısından da önem taşıdığı görülmektedir. Cebirsel yapı anlayışı, cebirsel bir ifadeyi tek bir varlık (nicelik) olarak görmeyi ve bir niceliği alt yapıları cinsinden (Hoch ve Dreyfus, 2004) ve "bir kümenin elemanlarını üzerinde

işlem yapılan nesneler olarak görmeyi" içerir (Novotná vd., 2006, s. 249). Dolayısıyla, bir öğretmenin *ib*'yi tek bir nicelik olarak algılaması, nicel muhakemenin, ortaöğretim öğretmenlerinin cebirsel yapıların anlamlarını (Thompson, 2016) kavramalarına yardımcı olabileceğini düşündürmektedir (Smith III ve Thompson, 2007; Thompson 2011). Bu nedenle, öğretmenlerin cebirsel bilgilerinin birçok alanının yeterince çalışmadığı ve tanımlanmadığı yerlerde (Warren vd., 2016), nicel muhakeme bakış açısını kullanarak araştırma yapılmasını öneriyoruz. Matematiksel fikirlerin (Ball vd., 2008) ve müfredattaki matematiksel yapıların birbiriyle nasıl bağlantılı olduğuna dair öğretmenlerin tutarlı bir resme sahip olmaları elzem olduğundan (Warren vd., 2016), bu önerimiz ayrıca önemlidir.

Son bir not olarak, bu çalışma yalnızca beş öğretmenin *i* ve *ib*'nin farklı anlamlarına ilişkin kavramsallaştırmalarına odaklandığından, yukarıda bahsedilen tartışmaya dayanarak, öğrencilerin, matematik öğretmen adaylarının ve öğretmenlerinin *i* ve *ib*'nin farklı anlamlarına ilişkin kavramsallaştırmaları üzerine daha fazla katılımcı ile çalışılmasını ve varsayımsal öğrenme rotaları geliştirerek tasarım-tabanlı araştırmalar yapılmasını öneriyoruz.

Teşekkür

Bu makale 19350 nolu Boğaziçi Üniversitesi Araştırma Projesi tarafından desteklenmektedir. Değerli katkılarından dolayı Dr. Tülay Ayyıldız'a şükranlarımızı sunarız.

Kaynakça

- Anevskaya, K., Gogovska, V., & Malcheski, R. (2015). The role of complex numbers in interdisciplinary integration in mathematics teaching. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 191, 2573-2577. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.04.553>
- Atmaca, U. İ., Uygun, N. G., Çağlar, M. F., & Çünür, I. (2014, August). *Haberleşme mühendisliği için mobil öğrenme uygulaması*. Paper presented at the VII. URSI-Türkiye Bilimsel Kongresi, Elazığ. https://www.researchgate.net/profile/Mehmet-Caglar/publication/280732542_Haberlesme_Muhendisligi_icin_Mobil_Ogrenme_Uygulamasi/links/55c3aa1a08aeb97567401a6f/Haberlesme-Muehendisligi-icin-Mobil-Oegrenme-Uygulamasi.pdf
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Benítez, J., Giménez, M. H., Hueso, J. L., Martínez, E., & Riera, J. (2013). Design and use of a learning object for finding complex polynomial roots. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(3), 365-376. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2012.729678>
- Caglayan, G. (2016). Mathematics teachers' visualization of complex number multiplication and the roots of unity in a dynamic geometry environment. *Computers in the Schools*, 33(3), 187-209. <https://doi.org/10.1080/07380569.2016.1218217>
- Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 547-589). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for mathematics* (Report No. ED522005). <https://learning.ccsso.org/wp-content/uploads/2022/11/ADA-Compliant-Math-Standards.pdf>
- Conference Board of the Mathematical Sciences. (2012). *The mathematical education of teachers II*. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/cbmeth/017>
- Conner, E., Rasmussen, C., Zandieh, M., & Smith, M. (2007). *Student understanding of complex numbers*. Proceedings of the 10th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. <http://sigmaa.maa.org/rume/crume2007/papers/conner-rasmussen-zandieh-smith.pdf>
- Çelik, A., & Özdemir, M. F. (2011). Ortaöğretimde Kompleks sayılarla ilgili kavram yanlışlarının belirlenmesi ve çözüm önerileri. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, (29), 203-229.
- Edwards, T., Özgün-Koca, S. A., & Chelst, K. (2021). Visualizing complex roots of a quadratic equation. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, 114(3), 238-243. <https://doi.org/10.5951/MTLT.2020.0028>
- Fauconnier, G., & Turner, M. (2002). *The way we think: Conceptual blending and the mind's hidden complexities*. Basic Books.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.16.1.0003>
- Gaona, J., López, S. S., & Montoya-Delgadillo, E. (2022). Prospective mathematics teachers learning complex numbers using technology. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(9), 2219-2248. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2133021>
- Glas, E. (1998). Fallibilism and the use of history in mathematics education. *Science & Education*, (7), 361-379. <https://doi.org/10.1023/A:1008695214877>
- Harding, A., & Engelbrecht, J. (2007). Sibling curves and complex roots 1: Looking back. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(7), 963-973. <https://doi.org/10.1080/00207390701564680>

- Harel, G. (2013). DNR-based curricula: The case of complex numbers. *Journal of Humanistic Mathematics*, 3(2), 2-61. <https://doi.org/10.5642/jhummath.201302.03>
- Hedden, C. B., & Langbauer, D. (2003). Balancing problem-solving skills with symbolic manipulation skills. In H. L. Schoen & R. I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving: Grades 6-12* (pp. 155-159). National Council of Teachers of Mathematics.
- Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Equations - a structural approach. In I. M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of The International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 152-155). Bergen University College.
- Karagöz Akar, G., Belin, M., Arabacı N., İmamoğlu, Y., & Akoğlu, K. (2023a). Knowledge of different forms of complex numbers through quantitative reasoning: The case of teachers. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3785-2792). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.
- Karagöz Akar, G., Belin, M., Arabacı, N., İmamoğlu, Y., & Akoğlu, K. (2023b). Different meanings of pure imaginary numbers. In M. Shelley, O. T. Ozturk, & M. L. Ciddi (Eds.), *Proceedings of ICEMST 2023-International Conference on Education in Mathematics, Science and Technology* (pp. 259-277). ISTES.
- Karagöz Akar, G., Belin, M., Arabacı, N., İmamoğlu, Y., & Akoğlu, K. (2024). Teachers' knowledge of different forms of complex numbers through quantitative reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-25. <https://doi.org/10.1080/10986065.2024.2378910>
- Karagöz Akar, G., Sarac, M. & Belin, M. (2023). Exploring prospective teachers' development of the Cartesian form of complex numbers. *Mathematics Teacher Educator* 12(1), 49-69. <https://doi.org/10.5951/MTE.2022.0034>
- Karagöz Akar, G., Watanabe, T., & Turan, N. (2022). Quantitative Reasoning as a Framework to Analyze Mathematics Textbooks. In G. Karagöz Akar, İ. Ö. Zembat, S. Arslan, & P. W. Thompson (Eds.), *Quantitative reasoning in mathematics and science education* (pp. 107-132). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14553-7_5
- Karagöz Akar, G., Zembat, İ. Ö., Arslan, S., & Belin, M. (2022). Revisiting geometric transformations through quantitative reasoning. In G. Karagöz Akar, İ. Ö. Zembat, S. Arslan, & P. W. Thompson (Eds.), *Quantitative reasoning in mathematics and science education* (pp. 199-219). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14553-7_8
- Karakok, G., Soto-Johnson, H., & Dyben, S. A. (2015). Secondary teachers' conception of various forms of complex numbers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(4), 327-351. <https://doi.org/10.1007/s10857-014-9288-1>
- Karam, R. (2020). Why are complex numbers needed in quantum mechanics? Some answers for the introductory level. *American Journal of Physics*, 88(1), 39-45. <https://doi.org/10.1119/10.0000258>
- Karyağdı, B. (2022). *Investigating preservice teachers' content knowledge on multiplication and division* (Thesis No. 764493) [Master's thesis, Boğaziçi University]. Council of Higher Education National Thesis Center.
- Kontorovich, I. (2018a). Undergraduate's images of the root concept in $\mathbb{R}$ and in $\mathbb{C}$. *The Journal of Mathematical Behavior*, (49), 184-193. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.12.002>
- Kontorovich, I. (2018b). Roots in real and complex numbers: A case of unacceptable discrepancy. *For the Learning of Mathematics*, 38(1), 17-19. <https://www.jstor.org/stable/26548478>
- Kontorovich, I., Zazkis, R., & Mason, J. (2021). The metaphor of transition for introducing learners to new sets of numbers. In Y. H. Leong, B. Kaur, B. H. Choy, J. B. W. Yeo, & S. L. Chin (Eds.), *Excellence in mathematics education: foundations and pathways* (pp. 259-264). MERGA.

- Melliger, C. (2007). *How to graphically interpret the complex roots of a quadratic equation* (University of Nebraska–Lincoln MAT Exam Expository Papers No. 35). University of Nebraska–Lincoln. <https://digitalcommons.unl.edu/mathmidexpap/35>
- Moore, K. C., Carlson, M. P. & Oehrtman, M. (2009). *The role of quantitative reasoning in solving applied precalculus problems*. Paper presented at the Twelfth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, Atlanta, GA.
- Murray, N. T. (2018). Making imaginary roots real. *The Mathematics Teacher*, 112(1), 28-33. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.112.1.0028>
- Nachlieli, T., & Elbaum-Cohen, A. (2021). Teaching practices aimed at promoting meta-level learning: The case of complex numbers. *The Journal of Mathematical Behavior*, (62), 1-13. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100872>
- Nahin, P. J. (2010). *An imaginary tale: The story of $\sqrt{-1}$* . Princeton University Press. <https://doi.org/10.1515/9781400833894>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author.
- Nemirovsky, R., Rasmussen, C., Sweeney, G., & Wawro, M. (2012). When the classroom floor becomes the complex plane: Addition and multiplication as ways of bodily navigation. *Journal of the Learning Sciences*, 21(2), 287-323. <https://doi.org/10.1080/10508406.2011.611445>
- Nordlander, M. C., & Nordlander, E. (2012). On the concept image of complex numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(5), 627-641. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.633629>
- Novotná, J., Stehlíková, N., & Hoch, M. (2006). Structure sense for university algebra. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 249-256). Charles University in Prague.
- Panaoura, A., Elia, I., Gagatsis, A., & Giatilis, G. P. (2006). Geometric and algebraic approaches in the concept of complex numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(6), 681-706. <https://doi.org/10.1080/00207390600712281>
- Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berenson & W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America* (Vol 1, pp. 298-304). North Carolina State University.
- Saraç, M. (2016). *A prospective secondary mathematics teacher's development of the meaning of the cartesian form of complex numbers* (Thesis No. 459451) [Master's thesis, Boğaziçi University]. Council of Higher Education National Thesis Center.
- Saraç, M., & Karagöz Akar, G. (2017). A prospective secondary mathematics teacher's development of the meaning of complex numbers through quantitative reasoning. In E. Galindo & J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 267-271). Hoosier Association of Mathematics Teacher Educator.
- Seloane, P. M., Ramaila, S., & Ndlovu, M. (2023). Developing undergraduate engineering mathematics students' conceptual and procedural knowledge of complex numbers using GeoGebra. *Pythagoras*, 44(1), 1-14. <https://doi.org/10.4102/pythagoras.v44i1.763>
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>
- Simon, M. (2000). Research on mathematics teacher development: The teacher development experiment. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Routledge.

- Smith III, J. P., & Thompson, P. W. (2007). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95-132). Erlbaum.
- Soto-Johnson, H., & Troup, J. (2014). Reasoning on the complex plane via inscriptions and gesture. *The Journal of Mathematical Behavior*, (36), 109-125. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.09.004>
- Stevens, I. E. (2019). *Pre-service teachers' constructions of formulas through covariational reasoning with dynamic objects* (Thesis No. 14794) [Doctoral dissertation, University of Georgia]. <https://openscholar.uga.edu/record/14794?v=pdf>
- Stevens, I. E., & Moore, K. C. (2017). The intersection between quantification and an allencompassing meaning for a graph. In E. Galindo & J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 709-716). Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.
- Tekin, D. (2019). *A model for developing the multiplication of complex numbers* (Thesis No. 597960) [Master's thesis, Boğaziçi University]. Council of Higher Education National Thesis Center.
- Thompson, P. W. (1990, March). *A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebra*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA. <https://pat-thompson.net/PDFversions/1990TheoryQuant.pdf>
- Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Vergnaud, G. Harel, & J. Coufey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). SUNY Press.
- Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education*, WISDOMe Monographs (Vol. 1, pp. 33-57). University of Wyoming.
- Thompson, P. W. (2016). Researching mathematical meanings for teaching. In L. English & D. Kirshner, (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 435-461). Taylor and Francis.
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.
- Thompson, P. W., Hatfield, N. J., Yoon, H., Joshua, S., & Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among US and South Korean secondary mathematics teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 95-111. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.001>
- Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In *Research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 95-113). National Council of Teachers of Mathematics.
- Usiskin, Z., Peressini, A. L., Marchisotto, E. A., & Stanley, D. (2003). *Mathematics for high school teachers: An advanced perspective*. Prentice Hall.
- Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. In Á. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 73-108). Brill. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_3
- Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (5th ed.). Sage.