



Farklı tabanlarda basamak değeri üzerine matematik öğretmeni adaylarının somut materyal kullanımının incelenmesi: doğal sayılarda toplama ve çıkarma işlemleri

Ayşenur Yılmaz ¹, Betül Tekerek ²

Öz

Bu çalışmanın amacı, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının (OMÖA) farklı sayı tabanlarında basamak değeri kavramını nasıl anlamlandırdıklarını ve bu süreçte somut materyalleri nasıl kullandıklarını incelemektir. Bu amacı gerçekleştirmek için durum çalışması deseni kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları, Türkiye'deki bir devlet üniversitesinde öğrenim gören 24 OMÖA'dan oluşmaktadır. Katılımcılardan onluk, altılık ve üçlük tabanlarda yazılmış sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerini içeren etkinlik sorularını en az iki farklı somut materyal kullanarak yanıtlamaları istenmiştir. Katılımcılar bu etkinliği grup hâlinde tamamlamış, yazılı yanıtlarını dört hafta içinde sunmaları istenmiş ve herhangi bir tür somut materyal kullanma konusunda özgür bırakılmışlardır. Bulgular, OMÖA'ların basamak değeri için ilgili literatürde belirtilen orantısal ve orantısal olmayan modellere ek olarak karma model yaklaşımını da benimsediklerini ortaya koymuştur. Karma model kullanımı, öğretmen adaylarının orantısal ve orantısal olmayan modellerin güçlü yönlerinden yararlanmalarını sağlayan etkili bir strateji olarak öne çıkmıştır. Ayrıca, OMÖA'ların ikinci bir somut materyali kullanarak çözüm üretmede sınırlı kaldıkları ortaya çıkmıştır. Bu sınırlılık, OMÖA'ların farklı taban sistemleriyle çalışırken materyal çeşitliliğini sağlama konusunda karşılaştıkları zorlukları vurgulamakta ve bunun matematiksel anlam inşa etme süreçlerini etkilediğini ortaya koymaktadır.

Anahtar Kelimeler

Basamak değeri
Somut materyal
Toplama ve çıkarma işlemleri
Taban aritmetiği
Ortaokul matematik öğretmeni adayları

Makale Hakkında

Gönderim Tarihi: 22.07.2023
Kabul Tarihi: 02.05.2025
Elektronik Yayın Tarihi: 26.07.2025

DOI: 10.15390/ES.2025.2446

Giriş

Çocuklar okula sayı kavramı hakkında hiçbir şey bilmeden gelmezler; aksine, bu kavramla ilgili birçok fikre zaten sahiptirler. Doğal sayılar ve işlemler, matematik müfredatının temel konularıdır (National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000; Türkiye Cumhuriyeti Millî Eğitim Bakanlığı (MEB), 2018). Bu konular arasında yer alan basamak değeri, öğrencilerin aritmetik ve cebiri öğrenmelerine yardımcı olan önemli bir kavramdır (The Conference Board of The Mathematical Sciences, 2000). Basamak değeri kavramından önce, çocuklar sayıları öğrenir ve bazen 10 ile 20

¹ Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Kahramanmaraş, Türkiye, aysenuryilmaz@ksu.edu.tr

² Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Kahramanmaraş, Türkiye, btetekerek@ksu.edu.tr

arasındaki sayılar arasında örüntüler fark ederek onlara anlam verirler (Van de Walle vd., 2018). Sayıları gösterirken, 10 nesneyi tek bir bütün olarak algılamak ve bunları basamak değerlerine göre gruplar hâlinde temsil etmek, basamak değeri kavramını anlamaya yardımcı olur. Öğrenciler eğitim hayatlarında ilerledikçe, öğretimin odağı tek tek birimleri saymaktan, nesneleri 10'lu gruplar hâlinde saymaya doğru değişir. Bu süreç "birimleştirme" (unitizing) olarak adlandırılır ve basamak değeri kavramlarının formal olarak tanıtıldığı aşamayı işaret eder (Rojo vd., 2021). Bir sayıda, grubun büyüklüğü rakamın konumuna göre belirlenir; örneğin, 729 sayısında '7', yedi yüzü ifade ederken, 174 sayısında '7', yedi onluğu temsil etmektedir (Findell vd., 2001). Çünkü basamak değeri, bir rakamın değerinin sayının içindeki konumuna bağlı olduğunu ifade eden bir kavramdır (Reys vd., 2014).

Rakamların temsil ettiği değerlerin temel düzeyde anlaşılması, farklı sayı sistemlerini ve bu sistemlerde gerçekleştirilen algoritmaları (örneğin, toplama ve çıkarma işlemleri) kavramak için de önemlidir (Fasteen vd., 2015; Thanheiser, 2009). Sayı sistemlerinin derinlemesine anlaşılması, ancak sayıların üzerindeki işlemleri kavramak için gerekli olan çarpımsal yapının sağlam bir şekilde anlaşılmasıyla mümkündür (Nataraj ve Thomas, 2009). Sayma sürecinde basamak değeri ile çarpımsal yapının bir bütün olarak ele alınması büyük önem taşımaktadır (Hose ve Wells, 2013).

Basamak değeri kavramını onluk taban sistemi üzerinden anlamaya yönelik süreç, öğrencilerin matematik öğrenmeye başladıkları andan itibaren başlar (MEB, 2018) ve lise ya da üniversite düzeyinde taban aritmetiği başlığı altında karşılına çıkar (CoHE, 2007). Çocuklar 10 ile 20 arasındaki sayılar arasındaki örüntüler üzerinde çalışmaya devam ettikçe, 100'e kadar saymayı öğrendikçe ve sayılar arasındaki örüntüleri keşfettikçe, basamak değeri kavramının gelişimi de devam eder. Fiziksel modeller, sayıları grupta, rakamların basamak değerlerini anlama ve aralarındaki ilişkileri kavrama, onluk taban sistemini anlamada kilit bir rol oynar (Rojo vd., 2021; Van de Walle vd., 2018). Çocukların somut materyallerle (sayı pulları, sayı tabloları, onluk taban blokları vb.) oynadıkları oyunlar, 10 ve ötesi fikrinin yaygınlaşmasını destekler (Van de Walle vd., 2018). Van de Walle ve diğerlerinin (2018) basamak değeri için önerdiği orantılı ve orantısız modeller, sayısal basamak değeri kavramını anlamaya yönelik iki farklı yaklaşımı temsil etmektedir. Orantılı modeller, sayısal büyüklükleri doğrudan değerleriyle orantılı olarak görsel ve fiziksel olarak temsil eder; örneğin, onluk taban blokları her bloğun temsil ettiği büyüklüğü somut olarak gösterir. Buna karşılık, orantısız modeller, sayısal değerleri fiziksel boyutlarla doğrudan ilişkilendirmeden temsil eder; örneğin, jetonlar veya renkli çubuklar sayıları temsil edebilir, ancak fiziksel boyutları sayısal değerle doğrudan örtüşmez. Bu iki model, öğrencilerin basamak değeri kavramını farklı şekillerde kavramalarını sağlayarak kavramın daha derinlemesine anlaşılmasına katkıda bulunur.

Öğrenciler ilkökul müfredatında 10'luk sayı sistemi üzerinde çalıştıklarından, öğretmen adayları da 10'luk sayı sistemini kullanarak öğretim yapmaya hazırlanırlar. Öğretmen adayları, aldıkları alan bilgisi derslerinde diğer sayı sistemleri üzerinde çalışma fırsatı bulabilirler (CoHE, 2018). Basamak değeri ilkökul müfredatının önemli bir parçası olmasına rağmen, öğretmen adaylarının kavramsal uygulamalarda zorlandığı konulardan biridir (Roy, 2014). Araştırma sonuçları, öğretmen adaylarının basamak değerini kullanan prosedürleri başarıyla uyguladıklarını, ancak uyguladıkları prosedürleri anlamakta yetersiz kaldıklarını göstermektedir (Tarım ve Artut, 2013). Öğretmen adaylarının ön bilgisi veya hazır bulunuşluğu, sayıların basamaklarını doğru bir şekilde ifade edebildiklerini, ancak bu fikri basamaklar arası ilişkilere ve işlemlere aktaramadıklarını ortaya koymuştur (McClain, 2009). Dolayısıyla, 10'luk sistem üzerinde çalışırken basamaklar arasındaki 10 kat ilişkisinden bahsetmek, öğretmen adaylarının bu tabanı ve basamak değeri kavramını kavramsal olarak anladıklarını gerçekten göstermeyebilir. Örneğin Thanheiser ve Rhoads'ın (2009) çalışmasının sonuçları, öğretmen adaylarının yalnızca yaklaşık %30'unun onlar ve yüzler basamağında elde olarak 1 sayısını doğru bir şekilde yorumlama konusunda ön bilgiyle sınıfa geldiklerini ortaya koymuştur. Thanheiser'in (2005) çalışmasına göre ise öğretmen adaylarının yalnızca %20'si onluk sistemde rakamların değerlerini ve rakamlar arasındaki ilişkileri yorumlayabilmektedir. Araştırmacı, rakamlar arasında değişimde öne çıkan ödünç alma yaklaşımının, onluk sistem konusundaki zayıf anlayışlarını maskeleyeceğine inanmaktadır. Ona göre, rakamlarla ayrı ayrı temsil edilen gruplandırmayı anlamak (örneğin, 300'ün 3 tane 100'lük grubu; 60'ın 6 tane 10'luk grubu ve 7'nin 7 tane 1'lik grubu olması gibi) doğru sayıyı okumak kadar önemlidir (367 - üç yüz altmış yedi). Ancak, öğretmen adayları bu gruplandırma fikrini oluşturamaz veya bu ilişkiyi etkili bir şekilde kullanamazlar.

Araştırmalar ayrıca farklı tabanlarla basamak değeri kavramında çalışan öğretmen adaylarının bazı zorluklarla karşılaştıklarını ortaya koymuştur. Thanheiser ve Rhoads'ın (2009) çalışması, 20'lik sayı sisteminde çalışan Mayaların sayı sistemini anlama ve bunu 10'luk sistemle ilişkilendirme süreçlerini öğretmen adayları için ele almıştır. Çalışmanın sonuçlarından biri, öğretmen adaylarının yarısından fazlasının 20'lik tabanda çalışan Mayaların kullandığı gruplandırma yöntemini anlamakta zorlandığını ve üç basamaklı sayılarını doğru bir şekilde yazamadığını ortaya koymuştur. Sıfır sayısını, bulunduğu konuma göre değerlendirmek yerine bir boşluğu doldurmak olarak yorumlamışlardır. Bu süreçte, öğretmen adayları 10'luk sistemdeki sayılarla çalıştıklarında 10'luk sistemde yazılan sayıların altında yatan yapının derinlemesine bilinmediği ve örtük olduğu da ortaya çıkmıştır. Benzer şekilde, 10'luk sistemden farklı bir taban üzerinde çalışan Yackel ve diğerleri (2007), altı hafta boyunca erken aritmetiğe ilişkin derin bir kavramsal anlayış geliştirmek için ilk alan dersinde ilkökul öğretmen adayları için 8'lik tabanı da içeren bir dizi matematiksel görev uygulamışlardır. Çalışmanın sonuçları, 8'lik tabanda basamak değerini destekleyen dilin, bu dilin uygulanmasına olanak sağlayan görevler aracılığıyla öğrenilebileceğini göstermiştir. Görsel materyal desteğiyle 8'lik tabanda temel sayı gerçeklerini fark etmekle başlayan bu süreç, rakamlar arasındaki ilişkiyi vurgulayan görevler yoluyla geliştirilmiştir. Basamak değerleri arasındaki çarpımsal ilişkiyi ve toplama ve çıkarma işlemlerinde yapılan dönüşümleri göstermeyi amaçlayan McClain'in (2009) çalışmasında, öğretmen adayları 10'luk sistemle bağlantılı akıl yürütüyor gibi görünmektedir. Ancak, onluk taban düşüncelerini sekizlik tabandaki sayı gösterimlerine doğru bir şekilde aktaramadıkları ortaya çıkmıştır. Öte yandan, 8'lik tabanda çalışan Roy (2014), bir dizi ardışık matematiksel görevle öğretmen adaylarından bağlamsal problemler ve boş bir sayı doğrusu desteğiyle 8'lik sistemde toplama ve çıkarma işlemleri yapmalarını istemiştir. Bu süreçte, öğretmen adaylarının sayı doğrusu üzerinde farklı sayma stratejileri uyguladıkları, 8'lik sistemde kendilerine verilen sayıların rakamları arasında değişimler yaptıkları ve yaygın olarak kavramsal problem çözme stratejileri kullandıkları belirlenmiştir. Bu çalışma, öğretmen adaylarının rakamların kavramsal değerini destekleyen görevleri deneyimlemeleri nedeniyle daha az işlemsel ve daha derin kavramsal ilişkiler ve açıklamalar yaptıklarını ortaya koymuştur. Öğretmen adayları, toplama ve çıkarma işlemleri için algoritmanın farklı sayı tabanlarında aynı olduğunu keşfettiklerinde şaşırmışlardır. Fasteen ve diğerleri (2015), öğretmen adaylarının çarpma yoluyla farklı sayı sistemlerinin altında yatan yapıyı keşfetmelerine yardımcı olmak için 5'lik tabanı kullanarak çalışmıştır. Çalışmada, öğretmen adaylarının somut materyaller kullanarak 5'lik tabanda çarpmayı anlamalarına yardımcı olmak için bir ders tasarlanmıştır. Bu yaklaşım, 10 sayısının 10'luk ve 5'lik tabanlarda gösterimi arasındaki farkı kavramalarını sağlamıştır. 5'lik tabanda 10'u iki rakam yerine tek bir nicelik olarak anlamak, alan modeli kullanarak çarpmayı anlamaya yardımcı olmuştur. Ek olarak, bu yöntem, öğretmen adaylarının 5'lik tabanda konumsal yapı ve çarpımsal ilişkiler hakkında kavramsal bir anlayış geliştirmelerine yardımcı olmuştur.

İlgili literatür, öğretmen adaylarının farklı taban sistemlerinde basamak değeri kavramını anlamakta karşılaştıkları zorlukları veya anlayışlarını geliştirmek için neler yapıldığını açıkça vurgulamaktadır. Bu çalışmalar, öğretmen adaylarının farklı tabanlarla çalışırken kavramsal düşünme stratejilerini nasıl geliştirdiklerine odaklansa da öğretmen adaylarının somut materyallerin kullanımı yoluyla basamak değerini nasıl kavradıklarını derinlemesine incelememektedir. Ancak, somut materyallerin basamak değerleri arasındaki çarpımsal ilişkiyi somutlaştırma fırsatı sunduğunu, dolayısıyla bu ilişki için tartışılabilir bir bağlam sunduğunu biliyoruz (Cady vd., 2008; Rusiman ve Him, 2017; Thompson ve Lambdin, 1994). Çünkü çoklu temsilin yollarından biri, matematiği somut materyaller aracılığıyla öğrenmek veya öğretmektir. Bu temsiller sembolik, görsel, sözel veya fiziksel olabilir ve matematiğin öğretimi ve öğrenimi sürecinde kritik bir rol oynar. Lesh ve diğerlerine (1987) göre, çoklu temsiller derinlemesine anlayış için gereklidir, çünkü öğrencilerin matematiksel fikirleri farklı perspektiflerden görmelerini ve kavramlar arasında bağlantılar kurmalarını sağlar. Örneğin, basamak değeri gibi bir kavram, her biri kavramı yorumlamak için benzersiz bir yol sunan onluk taban blokları, sayı doğruları veya cebirsel notasyon kullanılarak temsil edilebilir. Goldin ve Kaput (1996) ayrıca, çoklu temsillerin önemini vurgulayarak, öğrencilerin matematiksel fikirleri daha etkili bir şekilde iletme becerilerini desteklediklerini öne sürmektedir. Öğrenciler, çeşitli temsil biçimlerini

kullanarak hem öğrenme hem de matematik öğretimi için çok önemli olan matematiksel kavramlar hakkında daha zengin ve daha esnek bir anlayış geliştirebilirler (Duval, 2006).

Ball ve Bass (2000), öğretmen eğitiminde içerik ve pedagojinin iç içe geçmesinin önemini vurgulamaktadır. Öğretmen adayları, özellikle basamak değerini anlamada, gelecekteki öğrencilerinin karşılaşacağı aynı zorluklarla karşılaşmaya ihtiyaç duyabilirler (Yackel vd., 2007). Bunu başarmanın etkili bir yolu, öğretmen adaylarının bilmedikleri tabanlarda aritmetik görevleri çözmelerini sağlamaktır; bu, öğrencilerinin zorluklarına karşı empati kurmalarını sağlar ve basamak değeri kavramlarını derinleştirmelerine yardımcı olur (Roy, 2014). Bu anlayış, somut materyallerin kullanımıyla kolaylaştırılmaktadır; çünkü yetişkinler de yeni kavramları öğrenirken somut araçlardan fayda sağlar (Mix, 2010). Somut materyalleri çoklu temsillerin bir parçası olarak dahil etmek basamak değerinin anlaşılmasını öğretmen adayları için daha erişilebilir hale getirir ve soyut kavramları somut deneyimlere dayandırır. Bu doğrultuda, bu çalışmanın amacı, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının (OMÖA) farklı sayı tabanlarında basamak değeri kavramını nasıl anlamlandırdıklarını ve bu süreçte somut materyalleri nasıl kullandıklarını incelemektir. Buna göre, bu çalışmanın araştırma sorusu OMÖA'lar farklı sayı tabanlarında basamak değeri kavramını anlamlandırmak için somut materyalleri nasıl kullanmaktadır ve bu süreçte hangi stratejileri benimsemektedir?

Yöntem

Bu çalışmada, nitel araştırmalarda tipik olan bir durum çalışması deseni kullanılmıştır (Yin, 2003). Bu desende, belirli bir vakanın derinlemesine incelenmesi yapılır. Bu süreç, "araştırmacının belirli bir kişi, sosyal ortam, olay veya grubun nasıl çalıştığını etkili bir şekilde anlamasına izin vermek için yeterli bilgi toplamasını" gerektirir (Berg, 2001, s.225). Bu çalışmanın bağlamında, OMÖA'lar araştırmacının durumu olarak alınmıştır.

Katılımcılar ve Çalışmanın Bağlamı

Bu çalışmanın katılımcıları, ilkököl ve ortaokul matematik öğretiminin temellerini inceleyen Özel Öğretim Yöntemleri 2 adlı dersi alan 24 üçüncü sınıf ortaokul matematik öğretmen adayından (4 erkek, 20 kadın) oluşmaktadır. Bu ders; öğretim yöntemlerini, materyallerini, stratejilerini ve öğrencilere matematiksel kavramları öğretmedeki en son araştırmaları, modern öğretim yaklaşımlarını, güncel müfredat güncellemelerini kapsamaktadır. Bu ders kapsamında ortaokul matematik öğretmeni adaylarından çeşitli konular için ders planları ve değerlendirmeler oluşturmaları da beklenmektedir. Ayrıca, erken yaşlarda sayı kavramlarını ve sayı duyusunu, işlemlerin anlamlarını, temel matematiksel gerçekleri, tam sayı ve basamak değeri kavramlarını, toplama ve çıkarma stratejilerini, çarpma ve bölme hesaplamasını ve cebirsel düşünmeyi öğrenmeleri için rehberlik edilirler. Bu dersten önce ise katılımcılar Genel Matematik, Soyut Matematik, Geometri, Lineer Cebir I-II, Analiz I-II, Matematikte Kavram Yanılgıları, Özel Öğretim Yöntemleri 1 derslerini tamamlamışlardır (CoHE, 2007). Üniversitede aldıkları bu derslerde taban aritmetiğine yönelik bir içerik bulunmamaktadır. Bununla birlikte, öğrenci seçme ve yerleştirme sınavı kapsamında öğrencilerin sorumlu oldukları konular arasında taban aritmetiği yer aldığından öğretmen adayları üniversiteye bu konuyla karşılaşmış olarak gelmektedir.

Çalışmanın örnekleme amaçlı ve erişilebilir örnekleme kapsamında belirlenmiştir (Fraenkel vd., 2012). Çalışma katılımcısı olma kriterleri, Özel Öğretim Yöntemleri-2 dersini alıyor olmak ve ortaokul matematiğinde somut materyal kullanma deneyimine sahip olmaktır. Ayrıca, bu dersi alan öğrenciler araştırmacılar için erişilebilir katılımcılardır.

Katılımcılara, erken dönemde sayı kavramının geliştirilmesiyle ilgili bir etkinlikte matematik laboratuvarındaki materyalleri serbestçe deneyimleme fırsatı sunulmuştur. Bunu takiben doğal sayılarda basamak değeri kavramlarının geliştirilmesi konusu kapsamında öğrenciler, onluk taban bloklarını deneyimlemişlerdir. Katılımcılara somut materyaller kullanarak matematiksel bilgi ve farkındalıklarını ortaya çıkarmayı amaçlayan bir projede Tablo 1’de bir kısmı yer alan etkinlik soruları sunulmuştur. Bu soruların yazılı olarak cevaplandırılması istenmiş ve bu süreçteki deneyimlerini anlamak için yansıtıcı düşünme raporları kullanılmıştır. OMÖA'lara etkinlik sorularını cevaplamaları için dört hafta süre verilmiştir. Bu süreçte, dersin yapıldığı matematik laboratuvarını boş zamanlarında

da kullanmalarına izin verilmiştir. Bu laboratuvar, Millî Eğitim Bakanlığı'nın ortaokul seviyesi için önerdiği gibi, somut materyalleri bireysel veya grup olarak kullanmak için sınıf olarak kurulmuştur. Matematik laboratuvarında aşağıdaki materyaller bulunmaktadır: öğrenci çizim seti (pergel-iletkeci) (50 adet), onluk çerçeve seti (15 adet), geometrik şekiller (3 kutu), kesir seti (yuvarlak) (5 kutu), desen blokları (plastik) 256 adet (2 kutu), birim küpler (2 kutu), birbirine bağlanan birim küpler (2 kutu), geometrik şeritler (2 kutu), onluk bloklar (3 kutu), simetri aynaları (10 adet), şeffaf kesir kartları (5 kutu), tangram (2 kutu), cebir karoları seti (2 kutu), şeffaf sayma fişleri (3 kutu) ve tahta çubuklar (1000 adet). Katılımcıların bu sınıfta bulunmayan herhangi bir materyali kullanmak istedikleri takdirde, bunun mümkün olduğu sınıf duyurularında belirtilmiştir.

Katılımcıların bu etkinliği grup olarak tamamlamalarına izin verilmiştir. Çalışma, bir proje kapsamında tamamladıkları çeşitli konular arasından bu ödevi gönüllü olarak seçen OMÖA'lar ile gerçekleştirilmiştir. Bu kapsamda, toplam 6 OMÖA grubu (toplam 24 OMÖA) etkinlik için çözümler üretmiştir. Bu çalışmada, zaten gruplara ayrılmış olan OMÖA'lara, "G" harfi ve ardından bir sayı (örn., G1, G2, ..., G6) ile temsil edilen grup numaraları verilmiştir.

Veri toplama aracı

Bu çalışma, toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri için hazırlanmış dört soru ve alt sorularından oluşan projenin bir parçasıdır. Bu çalışmada, OMÖA'ların farklı tabanlar aracılığıyla basamak değeri kavramını keşfetmelerini sağlamayı amaçlayan ve Tablo 1'de sunulan sorular, veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. İlgili literatürden yola çıkarak (örn: Ev Çimen, 2016; Fasteen vd., 2015; Roy, 2014; Yackel vd., 2007) OMÖA'lardan 10'luk taban, 3'lük taban ve 6'lık taban gibi farklı tabanlarda verilen sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerine yaklaşımlarını somut materyaller aracılığıyla göstermeleri istenmiştir.

Bu etkinlikteki sorular iki ayrı amaca hizmet etmektedir. İlk olarak, OMÖA'ların karşılaşacakları farklı tabanların kavramsal boyutunu ve bu keşfi yapmalarını sağlayacak toplama ve çıkarma işlemlerini anlamalarını sağlamak amaçlanmıştır. OMÖA'ların bu işlemleri anlamaları için onluk tabanda yazılan sayılarda yaptıkları değişik tokuşu anlamaları gerekecektir. Bu bağlamda, aşına olmadıkları ancak 10'luk tabanda aşına oldukları aynı sayıları içeren farklı tabanlarda yazılmış sayılar ekleyerek OMÖA'lara ön bilgilerini kullanarak bu keşfi yapma fırsatı verilmiştir. Ek olarak, literatürde basamak değeri modelleri iki şekilde modellenenebildiğinden (orantılı modeller ve orantısız modeller), OMÖA'lardan en az iki farklı somut materyal kullanmaları istenmiştir. OMÖA'lara sunulan sorular aşağıda gösterilmektedir:

Tablo 1. OMÖA'lara 10'luk taban, 6'lık taban ve 3'lük tabandaki işlemlerde sunulan sorular

Aşağıdaki sayıların her biri onluk sayı sisteminde verilmiştir. Bu işlemleri en az iki çeşit somut materyal kullanarak göstermek isteseydiniz nasıl yapardınız? (Çözümlerinizin fotoğraflarını çekmeyi ve çözümlerinizi ayrıntılandırarak anlatmayı unutmayınız.)

$$\begin{array}{r} 10202 \\ - 1121 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4302 \\ + 505 \\ \hline \end{array}$$

Aşağıdaki sayılar farklı sayı sistemlerinde verilmiştir. En az iki çeşit somut materyal kullanarak bu işlemleri göstermek isteseydiniz nasıl yapardınız? (Çözümlerinizin fotoğraflarını çekmeyi ve çözümlerinizi ayrıntılandırarak anlatmayı unutmayınız.)

$$\begin{array}{r} (10202)_3 \\ - (1121)_3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (4302)_6 \\ + (505)_6 \\ \hline \end{array}$$

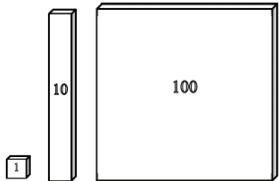
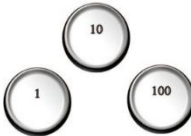
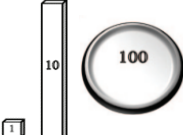
Tablo 1'de görüldüğü gibi, ölçme aracında toplama ve çıkarma işlemleri için ikişer soru sorulmuştur. Findell ve diğerlerine (2001) göre, işlemler yoluyla basamak değeri kavramını anlamak, sayıların konumlarına göre taşıdıkları değerin anlaşılmasını sağlar; bu kavram, özellikle aritmetik işlemlerde açıkça görülmektedir. Bu işlemler, öğrencilerin sayıların konumsal önemini kullanarak basamak değeriyle aktif olarak etkileşim kurmalarını gerektirir. Örneğin, bir sayının yüzler basamağındaki değer, başka bir sayının yüzler basamağındaki değere eklendiğinde, öğrenci konum sırasına ve her rakamın taşıdığı değere odaklanmalıdır. Bu süreç, basamak değeri kavramını soyut bir fikirden somut bir uygulamaya dönüştürür. Bu tür işlemler, öğrencilerin basamak değerini anlamada sayısal bilgilerini pratik olarak test etmelerini gerektirir. Toplama ve çıkarma, çarpma ve bölmeyle kıyasla basamak değeri anlayışını derinleştirmek için daha az karmaşık ve daha sağlam bir temel sağlar. Bu nedenle, bu çalışmada, basamak değeri incelemesi toplama ve çıkarma işlemleri yoluyla sunulmaktadır. Sorulardan biri 10'luk tabanda, diğeri ise aynı ancak farklı bir tabanda temsil edilecek şekilde sorulmuştur. Tıpkı ilkökul ve ortaokul öğrencilerinin basamak değeri anlayışlarını geliştirirken 10'luk sayı sistemine aşına olmayabilecekleri gibi, bu etkinlikte farklı tabanların kullanılması da OMÖA'lar için yeni bir durum olmuştur.

Veri analizi

OMÖA'ların çözümlerini incelemek için içerik analizi kullanılmıştır. İçerik analizi sürecinde, öncelikle OMÖA'ların sunduğu çözümler bütünsel olarak değerlendirilmiş ve benzerlikleri ile farklılıkları not edilmiştir. Ardından, çalışmanın amacına paralel olarak, Van de Walle ve diğerleri (2018) tarafından bahsedilen "Basamak Değerleri için Modeller" kapsamında kodlanmıştır. Van de Walle ve diğerlerinin (2018) "Basamak Değerleri için Modeller" yaklaşımı, matematik eğitimi alanında köklü ve yaygın olarak kabul görmüş bir yaklaşımdır. Bu model, zengin bir teorik temele dayanmaktadır ve öğrencilerin basamak değeri kavramlarını anlamalarını keşfetmek için çeşitli araştırmacılar (Disney ve Eisenreich, 2018; Houdement ve Petitfour, 2019; Rojo vd., 2021) tarafından kullanılmıştır. Ayrıca, Hiebert ve Carpenter (1992), basamak değerini anlama sürecinde somut manipülatifler kullanılırken materyaller ve matematiksel temsil arasındaki mesafeyi dikkate almanın önemini vurgulamaktadır. Araştırmacılara göre, gruplandırmanın açıkça görüldüğü yaklaşım- Van de Walle ve diğerleri (2018) tarafından orantılı modelleme olarak adlandırılır- öğrencilerin basamak değerleri arasındaki ilişkileri fiziksel olarak deneyimlemelerini sağlar. Buna karşılık, doğrudan fiziksel ipuçları sağlamayan bir yaklaşım - Van de Walle ve diğerleri (2018) tarafından orantısız modelleme olarak adlandırılır - öğrencilerin bu ilişkiyi daha soyut bir şekilde kurmalarını gerektirir. Bu bağlamda, orantılı modeller öğrenenlere daha fazla bağlamsal destek sunarken, orantısız modeller daha soyut temsiller olarak işlev görür (Baroody, 1990). Araştırma hedeflerimiz ve bu modelin güçlü yönleri arasındaki uyum göz önüne alındığında, verilerimizi analiz etmek için sağlam bir çerçeve sağladığına inanıyoruz.

Buna göre, eğer OMÖA'lar sayıların temsillerini ve işlemler sırasında yaptıkları değişimleri basamak değerlerini kullanarak orantılı olarak gerçekleştirirlerse, bu orantılı model kullanımı olarak kodlanır ve eğer orantısız olarak gerçekleştirirlerse, bu orantısız model kullanımı olarak kodlanır. Öte yandan, bazı OMÖA'lar tek bir modele bağlı kalmadan sayıların temsillerini ve işlemlerini gerçekleştirirken basamak değerlerini anlamlandırmışlardır. Bu şekildeki veriler karma model kullanımı olarak kodlanmıştır. Bu modellerin her birine birer örnek aşağıda sunulmuştur:

Tablo 2. Somut modeller aracılığıyla basamak değeri kavramını temsil eden modeller için kodlama tanımları*

Basamak değeri kavramını temsil eden modeller	Kod tanımı*	Görsel temsil
Orantısız Model	Basamak değerleri arasındaki fiziksel ilişkinin açıkça görüldüğü sayı temsillerine ve işlem açıklamalarına sahip stratejiler.	 (Rojo vd., 2021, s. 37)
Orantısız Olmayan Model	Sayı temsillerinde basamak değerleri arasında fiziksel ilişkinin bulunmadığı, ancak işlem açıklamalarında bulunduğu stratejiler.	 (Rojo vd., 2021, s. 37)
Karma Model	Sayı temsillerinin bazı rakamlarında basamak değerleri arasında fiziksel ilişkinin bulunduğu, bazılarında ise bulunmadığı stratejiler.	 Çalışmanın mevcut verileri, Rojo vd. (2021) ve Van de Walle vd.'den (2018) yararlanarak ek bir kullanım ortaya çıkarmıştır.

* Van de Walle ve diğerleri (2018, s. 191-193) temel alınarak geliştirilmiştir.

Çalışmanın geçerlik ve güvenilirliği

İçerik geçerliliği, ikinci yazarın ve ilgili literatürün desteğiyle sağlanmıştır. Sorular ilk olarak birinci araştırmacı tarafından oluşturulmuş, ardından ikinci araştırmacı tarafından gözden geçirilmiştir. Sorular, süreç boyunca her iki yazarın katkıları ve işbirlikçi tartışmalarıyla geliştirilmiş ve iyileştirilmiştir. Bu süreçte sayı seçimi, OMÖA'larını basamak değeri içindeki çarpımsal bağlantıları anlamaya ve işlem temsilleri için yöntemler geliştirmeye teşvik edecek şekilde gerçekleştirilmiştir (Ev Çimen, 2016; McClain, 2009; Roy, 2014). Ek olarak, literatürde incelenen 8, 20 ve 5 tabanlarına katkıda bulunmak için taban seçimi bunlardan farklı olarak yapılmıştır. OMÖA'ların kavramsal anlayışlarına daha derinlemesine bir bakış açısı kazandırmak için, araştırmacılar, literatürdeki rehberliğe uygun olarak (Van de Walle vd., 2018) kavramı en az iki farklı materyal kullanarak göstermeye karar vermişlerdir. Veri toplama aracı geliştirildikten sonra, birinci yazar verileri bir proje ödevi şeklinde toplamıştır.

Çalışmanın güvenilirliği, kodlayıcılar arası uyum yoluyla sağlanmıştır (Saldaña, 2012). Öncelikle, iki grup rastgele seçilmiş ve etkinlikleri yazarlar tarafından eş zamanlı olarak analiz edilmiştir. Bu sayede bir kodlama listesi oluşturulmuştur. Bunu takiben, kalan dört etkinlik bağımsız olarak kodlanmış ve araştırmacılar bu dört etkinlik için dört ayrı oturum düzenlemişlerdir. Her oturumda, farklı kodlanan veya kodlama listesine değişiklik önerilen alanlar değerlendirilmiş ve veri analizine yönelik güncellemeler belirlenerek sonraki analiz için ve önceki analizlerdeki ilgili alanlar için uygulanmıştır.

Etik

İnsan katılımcıların yer aldığı çalışmalarda uygulanan prosedürler, ilgili etik standartlara uygun olup çalışmanın yürütüldüğü üniversitenin Uygulamalı Etik Araştırma Merkezi tarafından onaylanmıştır.

Bulgular

OMÖA'ların somut materyal kullanımının işlemlere, sayıların tabanlarına ve materyal çeşitlerine göre dağılımı

Tablo 3, G1 ve G5'in her taban için iki tür somut materyal kullanabildiğini, G2, G3 ve G4'ün ise her taban için bir materyal kullanabildiğini göstermektedir. Taban ne olursa olsun materyal çeşitliliğini artırmada sorunlar olabileceğini söyleyebiliriz. Tablo 3 ayrıca, G6'nın 10'luk tabanda çıkarma için bir materyal kullanabildiğini ancak 6'lık tabanda toplama için herhangi bir materyal kullanmadığını ortaya koymuştur. Bu nedenle, somut materyallerin çeşitliliğini artırmanın taban değiştiğinde sorunlu hale gelebileceğini söyleyebiliriz.

Tablo ayrıca, OMÖA'ların hangi materyalleri kullandıklarını da açıkça göstermektedir. OMÖA'lar işlemleri temsil etmek için cebir karoları (C.K), tahta çubuklar (T.Ç), birim küpler (B.K), birbirine bağlanan küpler (B.B.K), geometri şeritleri (G.Ş) veya onluk taban blokları (O.T.B) kullanmıştır. Buna göre; cebir karoları, birim küpler-geçmeli birim küpler, tahta çubuklar ve geometri şeritleri gruplar tarafından basamak değerini temsil etmek için en az tercih edilen somut materyallerdir. Buna karşılık, birim küpler, geçmeli birim küpler ve onluk taban blokları en çok tercih edilen materyallerdir. Bu materyaller arasında, onluk taban blokları tüm tabanlarda kullanılan tek materyal olma özelliği göstermektedir. Sadece bir grup (G4), temsillerinde birim küpleri ve geçmeli küpleri birlikte kullanmıştır.

Tablo 3. Kullanılan materyal çeşitlerinin* işlemler ve sayıların tabanlarına göre dağılımı

İşlemler Gruplar**	Toplama		Çıkarma	
	Taban 6	Taban 10	Taban 3	Taban 10
G1	C.K, O.T.B (2 materyal)	C.K, O.T.B (2 materyal)	B.K, G.B.K (2 materyal)	G.Ş, O.T.B (2 materyal)
G2	O.T.B (1 materyal)	O.T.B (1 materyal)	O.T.B (1 materyal)	O.T.B (1 materyal)
G3	G.B.K (1 materyal)	O.T.B (1 materyal)	G.B.K (1 materyal)	O.T.B (1 materyal)
G4	B.K – G.B.K (1 materyal)	O.T.B (1 materyal)	B.K – G.B.K (1 materyal)	O.T.B (1 materyal)
G5	B.K, G.B.K (2 materyal)	T.Ç, O.T.B (2 materyal)	B.K, G.B.K (2 materyal)	T.Ç, O.T.B (2 materyal)
G6	U/D***	G.Ş, O.T.B (2 materyal)	B.K, G.B.K (2 materyal)	O.T.B (1 materyal)

*C.K: Cebir karoları, T.Ç.: Tahta çubuklar, B.K: Birim küpler, G.B.K: Geçmeli birim küpler, G.Ş: geometri şeritleri, O.T.B: Onluk taban blokları, . B.K – G.B.K: Birim küpler ve geçmeli birim küpler (birlikte kullanılmıştır); ** G1-G6: Katılımcı grupları; ***U/D: Grup herhangi bir temsil sunmadığı için uygulanabilir değil

Tablo 4, öğretmen adaylarının farklı materyaller kullanarak basamak değerini nasıl modellediklerini göstermektedir. Buna göre, çalışmanın bulguları, katılımcıların somut materyalleri kullanırken basamak değerini temsil etmek için üç farklı strateji kullandıklarını ortaya koymuştur: orantısal model, orantısal olmayan model ve karma model.

Tablo 4. Materyal çeşitliliği* ve sayıların tabanlarına göre temsil yaklaşımlarının dağılımı

Basamak değeri kavramını temsil eden model	Toplama		Çıkarma	
	Taban 10	Taban 6	Taban 10	Taban 3
Orantısal model	O.T.B	O.T.B	O.T.B	O.T.B, B.K, B.B.
Orantısal olmayan model	T.Ç, G.Ş	B.K, G.B.K	T.Ç, G.Ş	B.K, G.B.K
Karma model	C.K	C.K, O.T.B, B.K – G.B.K	-	B.K – G.B.K

*C.K: Cebir karoları, T.Ç.: Tahta çubuklar, B.K: Birim küpler, G.B.K: Geçmeli birim küpler, G.Ş: geometri şeritleri, O.T.B: Onluk taban blokları. B.K – G.B.K: Birim küpler ve geçmeli birim küpler (birlikte kullanılmıştır)

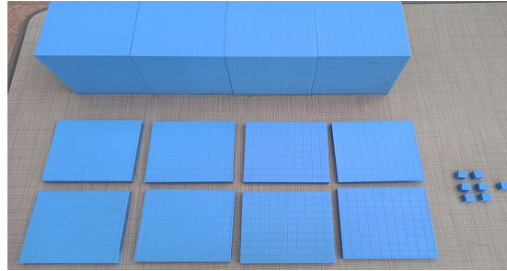
Bu tabloya göre, orantısal model; onluk taban blokları, birim küpler veya geçmeli birim küplerin kullanımını içermiştir. Bu temsilde onluk taban bloklarının farklı tabanlarda tutarlı bir şekilde kullanıldığı söylenebilir. Orantısal olmayan modellemelerde; birim küpler, geçmeli birim küpler, tahta çubuklar veya geometri şeritleri kullanılmıştır. Onluk taban blokları materyalinin kullanılmadığı tek temsil, orantısal modelleme olmuştur. Karma modellemelerde; cebir karoları, onluk taban blokları veya birim küpler ve geçmeli birim küplerin birlikteliğiyle kullanılmıştır. Cebir karoları yalnızca karma modellemelerde kullanılırken, birim küpler ve geçmeli birim küpler tüm modelleme stratejilerinde kullanılmıştır. Onluk tabandaki işlemler için, hangi işlem olduğu fark etmeksizin onluk taban blokları, tahta çubuklar ve geometri şeritleri tercih edilmiştir. Birim küpler ve geçmeli birim birim küpler, 3'lük ve 6'luk tabanlarda en sık kullanılan somut materyaller olmuştur.

OMÖA'ların 6 ve 10 Tabanlarında $4302 + 505$ İşlemi İçin Basamak Değeri Temsilleri

$4302 + 505$ ifadesi, hem 10'luk hem de 6'luk tabanda en az iki somut materyalle çözülmek üzere OMÖA'lara sunulmuştur. Aşağıda, OMÖA'ların bu işlem için kullandığı orantısal, orantısal olmayan ve karma model kullanımları yakından incelenmiştir.

10'luk Tabanda Temsil Yaklaşımları

10'luk tabanda orantısal model kullanımı. Tablo 4'ten görüldüğü gibi, 10'luk tabanda toplama işlemi için orantısal modelin kullanımı yalnızca onluk taban blokları aracılığıyla temsil edilmiştir. Bir örnek aşağıda Şekil 1'de gösterilmiştir. G4, açıklamalarında toplama işlemine birler basamağından başlayıp sola doğru ilerlediklerini vurgulamıştır. Buna göre, 5 birim artı 2 birim 7 birim eder. Her iki sayıda da onlar basamağı olmadığından, toplamda onlar basamağında 0 vardır. Bunu takiben, yüzler basamağında 8 yüz ve binler basamağında 4 bin elde edilir. Bu nedenle, toplam 4807'dir ve 4 binlik, 8 yüzlük, 0 onluk ve 7 birlikten oluşmaktadır.

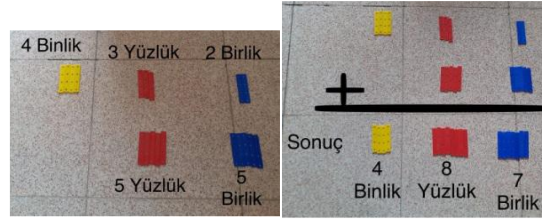


Şekil 1. $4302 + 505$ için onluk taban blokları aracılığıyla orantısal modelleme (G4)

10'luk tabanda orantısal olmayan model kullanımı. 10'luk tabanda toplama işlemi için orantısal olmayan modelin kullanımı tahta çubuklar (G5) ve geometri şeritleri (G6) aracılığıyla temsil edilmiştir. Buna göre G5, Şekil 2'de gösterildiği gibi binliklerin, yüzlüklerin ve birliklerin sayı değerlerini sırasıyla özdeş tahta çubuklara atamıştır; G6 ise, Şekil 3'te görüldüğü gibi, binliklerin, yüzlüklerin ve birliklerin sayı değerlerini farklı renkli geometri şeritlerine atamıştır.



Şekil 2. $4302 + 505$ için tahta çubuklar aracılığıyla orantısal olmayan modelleme (G5)

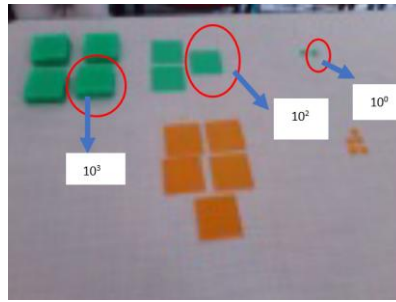


Şekil 3. 4302 + 505 için geometri şeritleri aracılığıyla orantısız olmayan modelleme (G6)

Basamakların sayı değerlerini materyallerle temsil etmeye yarayan bu yöntem, basamak değerleri arasındaki ilişkileri doğrudan somutlaştırmak yerine soyut bir temsil sağlamıştır.

10'luk tabanda karma model kullanımı. G1, verilen toplama işlemini gerçekleştirmek için cebir karolarını karma modelleme yaklaşımıyla kullanmıştır. Şekil 4'te gösterildiği gibi, bu kullanımda yüzler basamağı ve birler basamağı orantısız olmayan bir modelleme yaklaşımıyla modellenirken, binler basamağı on yüzlüğü temsil ederek orantısız bir modelleme yaklaşımıyla modellenmiştir.

Buna göre grup önce birler basamağındaki 2 ve 5'i toplayarak 7 birlik elde etmiş ve bunu 7 küçük kare cebir karosuyla temsil etmiştir. Her iki sayıda da onlar basamağında 0 olduğu için onlar basamağı boş bırakılmıştır. Yüzler basamağında, 3 yüzlük ve 5 yüzlük toplandığında 8 yüzlük elde edilmiş, sekiz büyük kare cebir karosuyla temsil edilmiştir. Son olarak, binler basamağında yer alan 4 binlik her biri on yüzlükten oluşan dört yığın olarak modellenmiştir. Başka bir deyişle, grup 4302 sayısındaki 4 binliğin her biri için on yeşil karo kullanmıştır. Bu süreçle grup 7 binlik, 8 yüzlük, 0 onluk ve 4 birlikten oluşan sayıyı elde etmiştir.

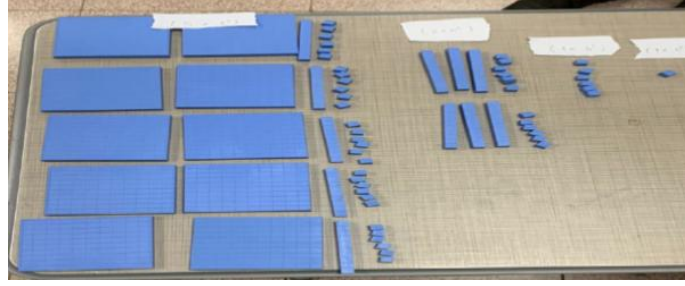


Şekil 4. 4302 + 505 için cebir karoları aracılığıyla karma modelleme yaklaşımı (G1)

OMÖA'lar, binler basamağını, en yüksek basamak değerini, daha kolay bir şekilde temsil etme ve belki de yüzler ve binler basamakları arasındaki ilişkiyi orantısız temsil yoluyla daha net bir şekilde gösterme olanağından yararlanmışlardır. Ayrıca, orantısız olmayan modelleme yoluyla birler ve yüzler basamaklarındaki nispeten daha küçük sayıları daha az materyalle temsil etme esnekliğinden de yararlandıklarını söyleyebiliriz. Kullandıkları materyal, birler basamağı ve onlar basamağı arasında veya onlar basamağı ve yüzler basamağı arasında fiziksel bir çarpımsal ilişki kurmak için uygun değilse de bu çarpımsal ilişkiyi yüzler ve binler basamakları arasında göstermede uygun şekilde kullanmışlardır.

6'lık Tabanda Temsil Yaklaşımları

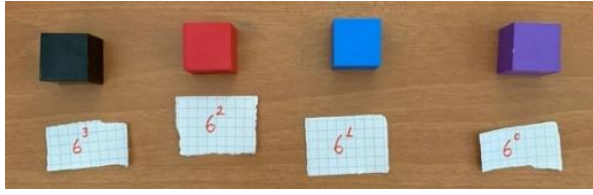
6'lık tabanda orantısız modelin kullanımı. 6'lık tabanda toplama işlemi için orantısız model kullanımı yalnızca G2 tarafından uygulanmıştır. Grup, toplama işleminin onluk taban blokları kullanarak nasıl yapıldığını Şekil 5'te göstermiştir. 6^3 basamağını 216, 6^2 basamağını 36 ve 6^1 basamağını onluk taban blokları üzerinde 6 olarak temsil ettiklerini anlıyoruz. Örneğin, 216'yı temsil etmek için iki yüzlük blok, bir onluk blok ve altı birlik blok kullanılmıştır. Sonunda, Şekil 5'te görüldüğü gibi, işlemin sonucu materyal aracılığıyla aşağıdaki şekilde temsil edilmiştir.



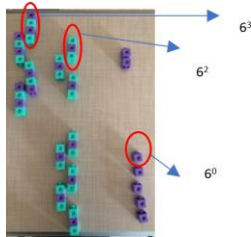
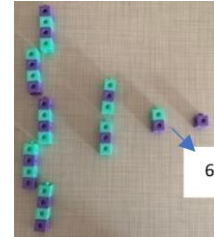
Şekil 5. $(4302)_6 + (505)_6$ için onluk taban blokları aracılığıyla orantısal modelleme (G2)

10'luk ve 6'lık tabanlarda kullanılan orantısal modelleme, sayıların basamak değerlerine göre toplandığı ve gerektiğinde bir sonraki basamak değerine elde eklenmesi temel bir mantığını taşımaktadır. 10'luk tabanda, OMÖA'lar genellikle sayıları temsil etmek için onluk taban blokları kullanmış ve herhangi bir eldeye gerek kalmadan her basamaktaki değerleri doğrudan toplamışlardır. Bu, süreci basit ve daha az karmaşık hale getirmiştir. Buna karşılık, OMÖA'lar 6'lık tabandaki işlemde herhangi bir basamaktaki toplam 6'ya ulaştığında bir sonraki basamağın değerine elde eklenmesi gerektiği karmaşıklığıyla birlikte onluk taban blokları kullanmıştır. Örneğin, 6 ve 1 toplandığında, 1 kalanı kaydedilmiş ve 1 bir sonraki basamak değerine elde olarak eklenmiştir. Bu, 6'lık taban işlemlerini daha karmaşık hale getirmiş ve elde kavramına dikkatli bir şekilde odaklanmayı gerektirmiştir.

6'lık tabanda orantısal olmayan modelin kullanımı. 6'lık tabandaki toplama işleminde, G5 orantısal olmayan model kullanmayı tercih etmiştir. Kullanılan materyaller farklı olsa da bu modeldeki ortak fikir, 6'lık tabanda verilen sayıların basamak değerlerini temsil etmek için orantısal olmayan karşılıkları olan materyallerin kullanılmasıydı. Grup, sayının her bir rakamını farklı renkteki birim küplere veya birbirine bağlanan birim küplere atamıştır (Şekil 6a ve c). Ardından, takası gerçekleştirmeden sayıları temsil etmek için birim küpler ve birbirine bağlanan birim küpler kullanılarak hesaplamalar yapmıştır (Şekil 6b ve d). Açıklamalarında öğrenciler orantısal olmayan modelin kullanımına odaklanmış ve işlemin adımlarını detaylandırmıştır. Buna göre, 5 birim ve 2 birimi topladıklarında, toplam 7 birim elde ettiklerini belirlediler ve bu noktada 6 birimi bir sonraki yüksek basamak değerinin tek bir birimine dönüştürerek, 1 birimi bir sonraki basamağa taşıdılar. Benzer şekilde, 36'lar basamağında 8'e ulaştıklarında, 6 tane 6'ya 6'ya dönüştürdüler ve 216'lar basamağına aktardılar. Sonuç olarak 5211 sonucuna ulaştılar. Bu süreç boyunca, takası gerçekleştirmek için basamak değerleri arasındaki altı kat ilişkisini kullandılar. OMÖA'ların işlemlerinin adımlarını açıkça ifade edebilme becerisi, işlemsel süreçlerini anlayabildiklerini gösterse de manipülatifler kullanarak basamak değerleri arasındaki çarpımsal ilişkileri ve değişimleri göstermede sınırlı olabilecekleri endişesini de beraberinde getirmektedir.



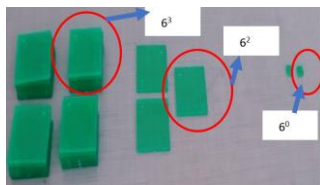
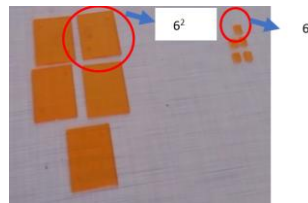
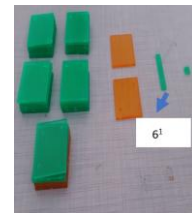
a. 6 tabanına ait basamakların birim küplerle temsili

b. $(4302)_6 + (505)_6$ sayılarının birim küplerle temsilic. $(4302)_6 + (505)_6$ sayılarının geçmeli birim küplerle temsilid. $(5211)_6$ sonucunun temsili

Şekil 6. Birim küpler ve geçmeli birim küpler yoluyla $(4302)_6 + (505)_6$ işleminin orantısız olmayan modellemesi (G5)

Birim küplerle yapılan temsiller Şekil 6a incelendiğinde, aynı boyutta olmalarına rağmen farklı renklerdeki birim küplerin farklı basamak değerlerini temsil etmek için kullanıldığını görüyoruz. Ancak, bu farklı renkler her bir toplananı temsil etmek için kullanıldığında (Şekil 6b), ilgili basamak değerleri uygun renkteki birim küplerle eşleşmemektedir. Buna göre, 6^0 'lar basamağındaki her bir toplanan, 6^1 'ler basamağını temsil eden mavi küple temsil edilmiştir. Geçmeli birim küpler kullanılarak yapılan diğer temsil (Şekil 6c ve d) içinde, toplananları ve toplam basamak değerlerini temsil etmek için hem farklı renkler hem de değişen sayıda geçmeli birim küp kullanılmıştır. Basamak değeri arttıkça geçmeli birim küp sayısındaki artış (1 mor, 1 mor ve 1 yeşil, 2 yeşil ve 1 mor, 2 yeşil ve 2 mor) OMÖA'lar tarafından zihinsel bir ipucu olarak kullanılmış gibi görünmektedir. Bu temsillerin basamakların sayı değerlerini doğrudan, basamak değerlerini ise dolaylı bir şekilde görselleştirilmesini desteklediğini öne sürebiliriz.

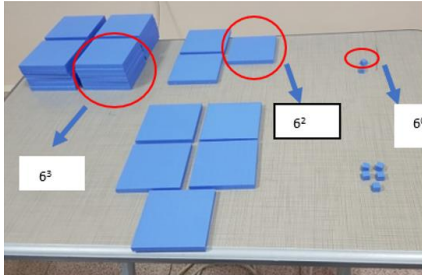
6'lık tabanda karma modelin kullanımı. G1, 6'lık tabanda toplama için karma bir modelleme yaklaşımı kullanmıştır. G1, cebir karolarını 6'lık tabanda Kare şeklindeki cebir karosu 6×6 birimi veya 6^2 rakamını, Dikdörtgen cebir karosu 6×1 birimi veya 6^1 rakamını, en küçük cebir karosu 6^0 rakamını veya bir birimi temsil edecek şekilde düzenlemiştir. Bu açıklamalardan da görüleceği gibi, başlangıçta orantısız bir bakış açısı benimsenmiş olsa da çarpımsal ilişki materyalde yalnızca 6^2 ve 6^3 basamak değerleri arasında yansıtılmıştır. Şekil 7'de gösterildiği gibi, grup 6^3 'ler basamağını 6 yüksekliğinde modellemiştir. Yeşil x^2 cebir karosu 6^2 'yi temsil ettiğinden, bu modeldeki 6^3 'ler basamağı da 6 yüksekliğiyle orantılıdır. Ancak, diğer basamak değerleri arasındaki ilişkiler orantısız olarak kabul edilse de orantısız olmayan şekilde temsil edilmiştir. Yeşil karo 6^2 'lar basamağı, küçük yeşil karolar ise orantısız olmayan bir yaklaşımla 6^1 'ler basamağıyla ilişkilendirilmiştir.

a. $(4302)_6$ sayısının cebir karosu yoluyla temsilib. $(505)_6$ sayısının cebir karosu yoluyla temsilic. $(5211)_6$ sonucunun cebir karosu yoluyla temsili

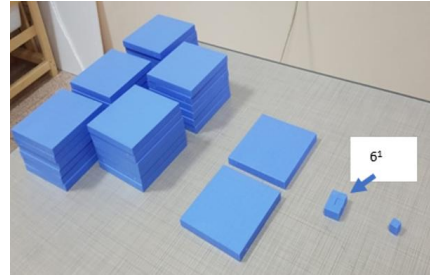
Şekil 7. $(4302)_6 + (505)_6$ işlemini cebir karoları yoluyla karma modelleme (G1)

G1, ikinci materyal seçiminde de karma bir yaklaşım kullanmıştır. Materyal üzerinde karışık bir şekilde orantılı bir yaklaşım kullandıklarını söylemek daha doğru olur. Aynı grup, cebir karolarını kullanırken karma bir modelle yaptığı gibi, onluk taban bloklarıyla da benzer bir yaklaşım benimsemiştir. Onluk taban bloklarının boyutlarını sırasıyla 6^0 , 6^2 ve 6^3 'ye benzeterek blokları birler, yüzler ve binler basamağına karşılık gelecek şekilde düzenlemişlerdir.

Şekil 8a, onluk taban blokları kullanılarak 6^1 'lik tabandaki sayıların temsillerini göstermektedir. 6^0 'lar basamağında 2'nin temsili ve 6^1 basamak değerinin 6 birim küple temsili orantılıdır. 6^2 'ler basamağı için 36'nın eşdeğeri yerine, onluk taban temsili olan bir yüzlük blok kullanılmıştır. Bu nedenle, her 6^2 yüzler basamağının 10^2 'ye karşılık gelmesi gibi, yüze karşılık gelir. Şekil 8b, 6^1 , 6^2 ve 6^3 arasında takas işlemleri yapıldıktan sonra elde edilen sayının temsili göstermektedir.



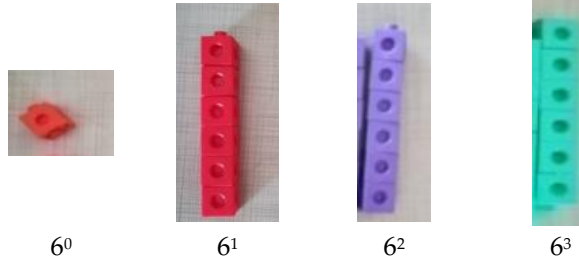
a. $(4302)_6$ and $(505)_6$ sayılarının onluk taban modelleriyle temsili



b. $(5211)_6$ sonucunun onluk taban blokları yoluyla temsili

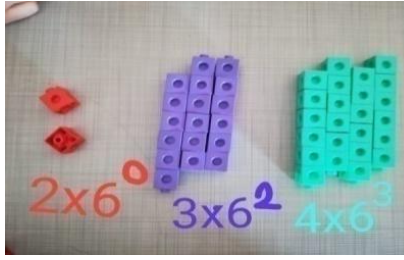
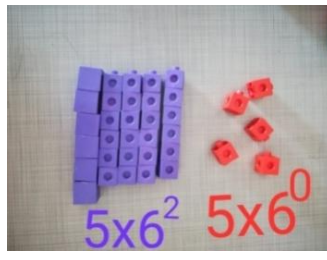
Şekil 8. $(4302)_6 + (505)_6$ işlemini onluk taban blokları yoluyla karma modelleme (G1)

G3 grubu karma bir yaklaşım kullanan başka bir gruptur. Grup, birim küpler ve geçmeli birim küplerin bir kombinasyonunu kullanmıştır. Küp sayısı, taban sayısına atanmış gibi görünmektedir. G3'ün basamak temsilleri Şekil 9'da gösterilmektedir. Buna göre, 6^0 ve 6^1 aralarında hem renk hem sayı olarak uyumlu ve orantısız bir ilişki içerirken, 6^1 , 6^2 ve 6^3 kendi aralarında orantısız olmayan ilişkileri barındırmaktadır. Bu nedenle, G3 $(4302)_6 + (505)_6$ için karma bir yaklaşım kullanmıştır.



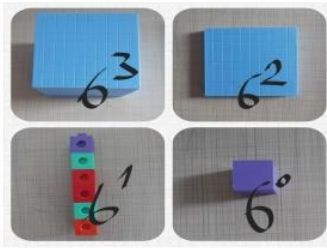
Şekil 9. $(4302)_6 + (505)_6$ işleminin basamak temsili (G3)

Şekil 10-a'da gösterildiği gibi, OMÖA'ların $(4302)_6$ sayısının basamak yerleşimini farklı şekilde yazdıkları gözlemlenmiştir. Diğer toplananın $(505)_6$ basamakları ise yerlerine doğru yazmıştır (Şekil 10-b). Materyaller kullanılarak 6^0 ve 6^1 arasındaki takas açıklanmış olsa da (Şekil 10-c), 6^0 ve 6^1 , 6^2 ve 6^3 arasındaki geçişler temsil edilmemiştir.

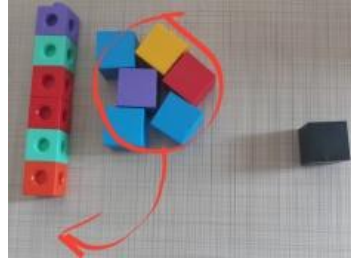
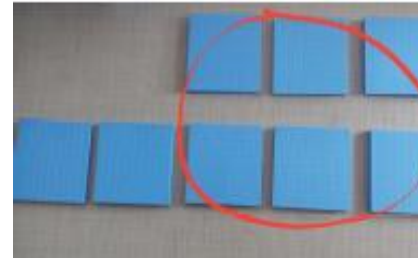
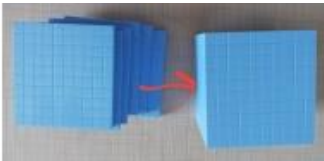
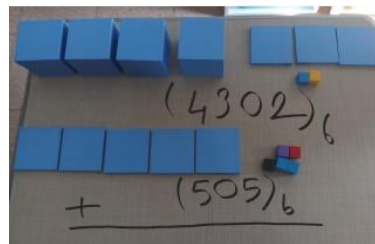
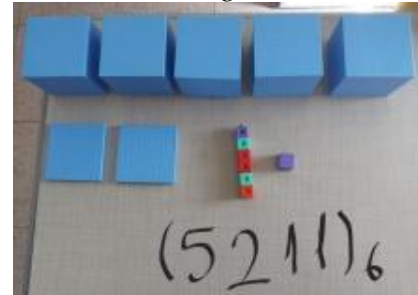
a. $(4302)_6$ sayısının geçmeli birim küpler yoluyla temsilib. $(505)_6$ sayısının geçmeli birim küpler yoluyla temsilic. 6^0 , 6^1 ve 6^2 arasındaki takasın temsili**Şekil 10.** Birim küp ve geçmeli birim küpler yoluyla işleminin $(4302)_6 + (505)_6$ (G3) karma modellemesi

G3'ün 6^0 'lar basamağı dışındaki basamaklar arası değişime ilişkin görsel bir materyalin olmaması, işlemi işlemsel dönüşüm yoluyla gerçekleştirdikleri ve sonucu bu şekilde belirledikleri fikrini akla getirmektedir.

Diğer grup olan G4 ise karma bir yaklaşım kullanmıştır. Grup, 6^0 'lar ve 6^1 'ler basamaklarını orantısal olarak temsil etmek için onluk taban blokları, geçmeli birim küpler ve birim küpler kullanmıştır (Şekil 11-a, b), ancak diğer basamakları (Şekil 11a-c-d) orantısal olmayan bir modelleme yaklaşımıyla temsil etmiştir. Şekil 11'de gösterildiği gibi, 6^2 ve 6^3 basamaklarını sayısal olarak eşit olmayan ancak eşitmiş gibi temsil etmek için onluk taban blokları kullanmışlardır:



a. Somut materyaller yoluyla altılık tabanda basamak temsili

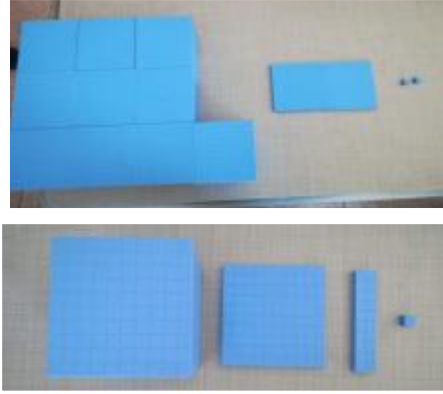
b. 6^0 , 6^1 ve 6^2 arasındaki takasın temsilic. 6 kere 6^2 ve 6^3 arasındaki takasın vurgulanmasıd. 6 kere 6^2 ve 6^3 arasındaki takasın vurgulanmasıe. $(4302)_6$ ve $(505)_6$ sayılarının somut materyaller yoluyla temsilif. $(5211)_6$ sonucunun somut materyaller yoluyla temsili**Şekil 11.** Birim küp, geçmeli birim küp ve onluk taban blokları yoluyla $(4302)_6 + (505)_6$ işleminin karma modellemesi (G4)

G4, somut materyaller aracılığıyla 6'lık sayı sisteminde basamaklar arasındaki takası vurgulamıştır. Ek olarak, grup $(4302)_6$ ve $(505)_6$ sayılarını ve toplama işleminin sonucunu $(5211)_6$ somut materyaller kullanarak ayrı ayrı modellemiştir. Bu yöntem, öğrencilerin farklı basamak değerlerini somut materyaller aracılığıyla görselleştirmelerini sağlamıştır.

OMÖA'ların 3 ve 10 Tabanlarında 10202 – 1121 İşlemi İçin Basamak Değeri Temsilleri 10'luk Tabanda Temsil Yaklaşımları.

10'luk tabanda orantısal modelin kullanılması. 10'luk tabanında çıkarma işlemi, tüm gruplar tarafından onluk taban blokları aracılığıyla orantısal model yaklaşımıyla gerçekleştirilmiştir. G1,

çıkarma işlemini onluk taban blokları kullanarak sayıları ayrıştırarak nasıl yapıldığını açıklamaktadır. Başlangıçta, 10202 sayısı on binlere, yüzlere ve birliklere ayrıştırılmıştır. Çıkarılacak sayı olan 1121, binlere, yüzlere, onlara ve birliklere ayrılmıştır. Çıkarma işlemi birler basamağından başlamıştır; iki birlikten bir birlik çıkarıldığında bir birlik kalmıştır. Onlar basamağında sıfır olduğundan, iki onluk çıkarılamamış ve dolayısıyla bir yüzlük on onluğa dönüştürülerek işleme devam edilmiştir. Bu adımlar diğer basamak değerleri için de benzer şekilde tekrarlanmış ve Şekil 12'de gösterildiği gibi 9081 sonucu elde edilmiştir.



Şekil 12. 10202-1121 için onluk taban blokları yoluyla orantısal modelleme (G3)

10'luk tabanda orantısal olmayan modelin kullanılması. OMÖA'lar Şekil 13'te gösterildiği gibi, 10'luk tabanda çıkarma işlemi için kahve çubukları (G5) ve geometri şeritleri (G1) kullanarak orantısal olmayan modelleme yapmışlardır.



a. 10202 ve 1121 sayılarının tahta çubuklar yoluyla temsili



b. 9081 sonucunun tahta çubuklar yoluyla temsili



c. 10202, 1121 sayılarının ve 9081 sonucunun geometri şeritleri yoluyla temsili

Şekil 13. 10202-1121 işlemini tahta çubuklar (G5) ve geometri şeritleri (G1) yoluyla orantısal olmayan modelleme

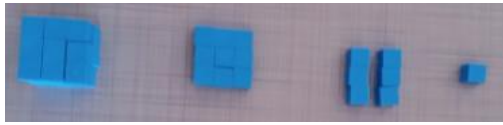
Şekil 13a ve b'de gösterildiği gibi, G5 sepetleri basamak değerlerinin yerleri ile çubukları sayı değerleriyle ilişkilendirmiştir. Pembe sepet birler, yüzler ve binler basamaklarıyla ilişkilendirilirken yeşil sepet onlar ve binler basamaklarını ifade etmektedir.

Bu temsilde kullanılan bir diğer materyal ise geometri şeritleridir. G1, Şekil 13c'de gösterildiği gibi, en uzun şeridi binler, orta uzunluktaki şeritleri onlar ve en kısa şeritleri birler basamağı olarak temsil etmek için geometri şeritlerini kullanmıştır. G5'in kullanımının aksine, basamakların değerlerini temsil eden geometri şeritleri farklı renklere sahiptir ve basamak değerlerini temsil etmek için ek bir materyal kullanılmamıştır.

3'lük Tabanda Temsil Yaklaşımları

3'lük tabanda orantısal modelin kullanımı. 3'lük tabanda çıkarma işlemi için orantısal model kullanımı G1, G2 ve G6 tarafından yapılmıştır. Gruplar, işlemi onluk taban blokları, birim küpler ve geçmeli birim küpler kullanarak temsil etmişlerdir. Somut materyallerin kullanımının tüm yolları Şekil 14, 15, 16 ve 17'de gösterilmiştir.

G1, Şekil 14 ve 15'te gösterildiği gibi, birim küpleri kullanarak 3'lük tabanda basamak değerlerini oluşturarak çözümü gerçekleştirmiştir. Bu yaklaşıma göre, grup onluk taban bloklarındaki birlik bloklardan üç birimi yan yana birleştirerek 3^0 sayısını bir bütün olarak ele almış ve 3^1 sayısını temsil etmiştir. 3^2 sayısını, birlik bloklardan dokuz tanesini 3×3 kare oluşturarak temsil etmişlerdir. 3^3 sayısını ise küp şekline dönüştürerek 3^4 'ü ise üç adet 3^3 'ü ayrı ayrı yerleştirerek temsil etmişlerdir (Şekil 14a ve Şekil 14b). $(1121)_3$ sayısı bir birlik, iki üçlü grup, (3×3) boyutunda bir kare ve $(3 \times 3 \times 3)$ boyutunda bir küp ile temsil edilen bir modelle sonuçlanır (Şekil 14a).



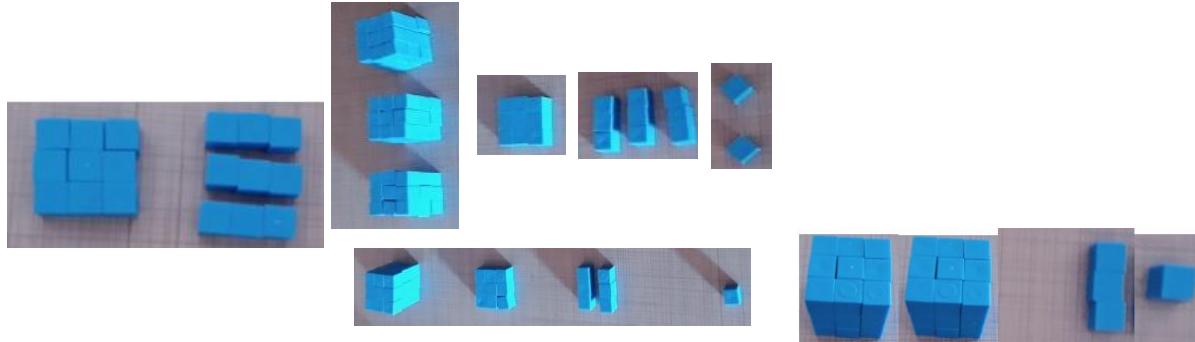
a. $(1121)_3$ sayısını modelleme



b. $(10202)_3$ sayısını modelleme

Şekil 14. $(10202)_3$ and $(1121)_3$ için birim küpler yoluyla orantısal modelleme (G1)

Sayıların çıkarılması, 3 tabanında takas sürecini yansıtan, gerektiğinde daha büyük basamakların daha küçük basamaklarla takas edilmesiyle modellenmiştir. Buna göre, katılımcılar Şekil 15a ve Şekil 15b'de gösterildiği gibi sırasıyla 3^2 basamağı ile 3^1 basamağı arasında ve 3^4 basamağı ile 3^3 basamağı arasında çarpımsal ilişkilendirmeyi göstermiştir. Bu çarpımsal ilişkilendirmeyi kullanarak sonuç Şekil 15c'de gösterildiği gibi görselleştirilmiştir.



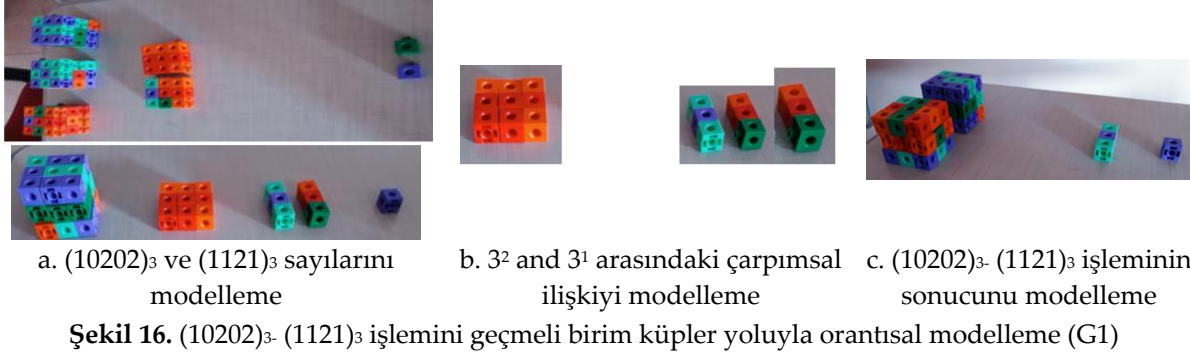
a. 3^2 and 3^1 arasındaki çarpımsal ilişkiyi modelleme

b. 3^4 and 3^3 arasındaki çarpımsal ilişkiyi ve $(10202)_3$ ve $(1121)_3$ sayılarını modelleme

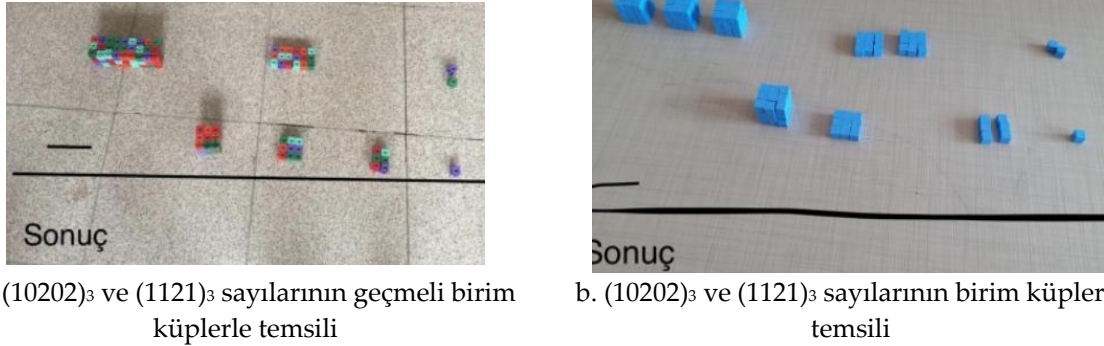
c. 10202-1121 işleminin sonucunu $(2011)_3$ olarak modelleme

Şekil 15. Birim küpler yoluyla takası modelleme ve $(10202)_3 - (1121)_3$ işleminin sonucunu orantısal modelleme (G1)

Şekil 16'da gösterildiği gibi, G1 aynı adımları geçmeli birim küplerde de gerçekleştirmiştir. G1'in orantısal olmayan modelleme veya karma model yaklaşımı gibi iki farklı yaklaşımı dikkate almadığını, aksine grubun orantısal modellemeyi iki tür materyalde esnek bir şekilde kullandığını anlayabiliriz. Bu nedenle, öğretmen adaylarının ikinci bir materyal kullanmak için her zaman alternatif bir modelleme yaklaşımı geliştirdiği söylenemez.

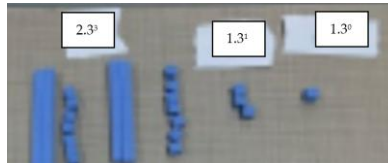


G6'nun modellemesi, bir nokta dışında G1'in modellemesiyle aynıdır. Tek fark, 10202₃ sayısının temsiliinde, Şekil 17a'da gösterildiği gibi 3⁴ rakamını 3.3³ yerine 1.3⁴ olarak göstermeleridir. Şekil 17b'de ise 3.3³ olarak temsil edilmektedir.



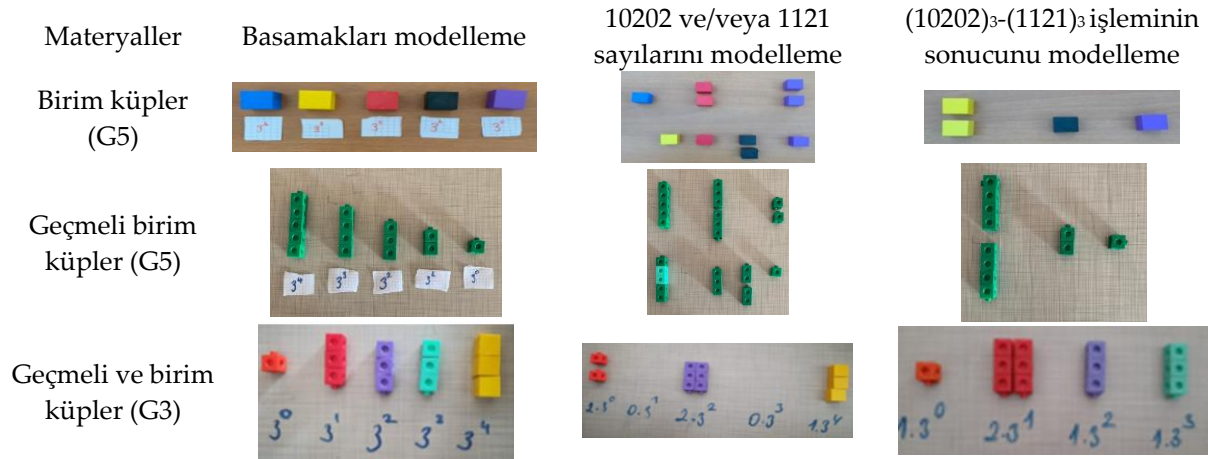
Şekil 17. Geçmeli birim küp ve birim küp yoluyla (10202)₃- (1121)₃ işlemini orantısal modelleme (G6)

G2 grubu, materyal sunumunda yalnızca çözümü orantısal olarak temsil etmiştir (Şekil 18). 2011₃ olan işlemin sonucu, 2.3³, 1.3¹, ve 1.3⁰ olarak modellenerek 2 adet 27'lik grup, 1 adet 3'lük grup ve 1 adet 1'lik olduğunu göstermektedir.



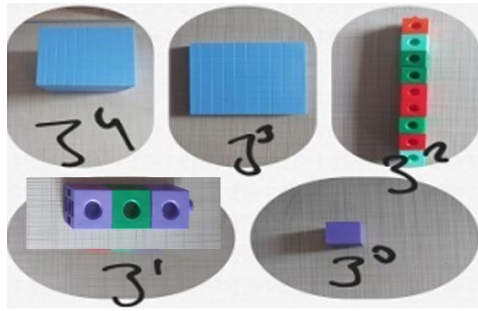
Şekil 18. (10202)₃- (1121)₃ işlemi için onluk taban blokları yoluyla orantısal modelleme (G2)

3'lük tabanda orantısal olmayan modelin kullanılması. G3 ve G5, orantısal olmayan model kullanmıştır. Şekil 19'da gösterildiği gibi, katılımcılar belirli basamak değerlerini belirli renklerle (Şekil 19 a-c) veya belirli sayıda geçmeli birim küple (Şekil 19 d-f) veya farklı renkteki geçmeli birim küplerle eşleştirmiştir (Şekil 19 g-k). Takas işleminin açıkça gösterilmediği bu temsillerde, işlem sonucu somutlaştırılmıştır.



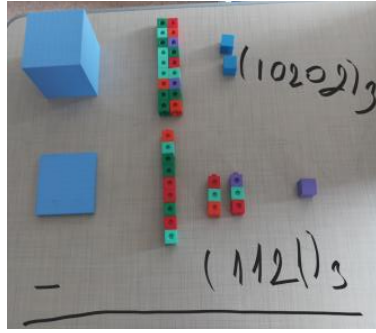
Şekil 19. Birim küpler ve geçmeli birim küpler yoluyla orantısız olmayan modelleme

3'lük tabanda karma modelin kullanımı. Sadece G4 grubu, 3'lük tabanda çıkarma işlemi için bu modeli kullanmıştır. Buna göre, Şekil 20'de, öğrencilerin 3^0 , 3^1 ve 3^2 sayıları için 1, 3 ve 9'un eşdeğerlerine karşılık gelen eşit sayıda birim küp ve geçmeli birim küp kullandıkları gözlemlenebilir. 3^3 ve 3^4 sayıları için, bu sayıları temsil etmek için 100 ve 1000'e karşılık gelen onluk taban blokları kullanılarak bu sayıları temsil etmek için bir tür orantısız olmayan bir materyal seçmişlerdir.

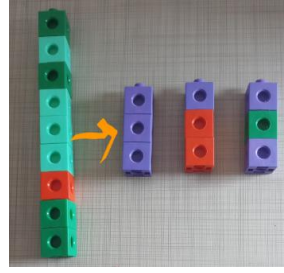
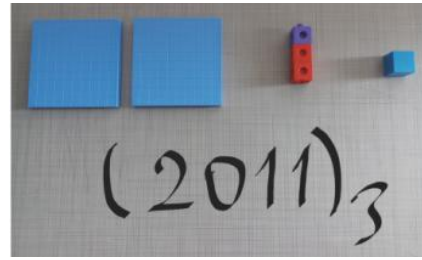


Şekil 20. Onluk taban blokları ve geçmeli birim küpler yoluyla basamaklara değer atayarak karma modelleme (G4)

G4, Şekil 21'de gösterilen temsillere dayanarak, sayı temsillerini yazmış ve çıkarma işlemini gerçekleştirmek için gerekli takası gerçekleştirmiştir.



a. Üçlük tabanda 10202-1121 işleminin temsili

b. 3²'yi üç 3¹'e dönüştürme ve çıkarma yapmac. 3⁴'yi üç 3³'e dönüştürme ve çıkarma yapmad. (10202)₃-(1121)₃ işleminin sonucunu modelleme

Şekil 21. Basamak değerini anlamlandırma ve üçlük tabanda 10202-1121 işlemini karma modelleme (G4)

Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmanın amacı, öğretmen adaylarının farklı sayı tabanlarında basamak değeri kavramını nasıl anlamlandırdıklarını ve bu süreçte somut materyalleri nasıl kullandıklarını incelemektir. Çalışmanın ortaokul matematik öğretmeni adaylarının basamak değeri temsiliinde somut materyalleri orantısız ve orantısız olmayan modeller yoluyla kullandıklarına dair bulgusu, matematik eğitiminde çoklu temsillerin önemine dair mevcut araştırmalarla uyumlu olup bu tür temsillerin kavramsal anlayışı desteklediğini göstermektedir. Çoklu temsiller, öğrenenlere matematiksel bir kavram hakkında farklı bakış açıları sunarak, daha derin bir anlayış geliştirmelerine ve farklı fikirler arasında bağlantılar kurmalarına yardımcı olur (Lesh vd., 1987). Basamak değeri bağlamında, somut materyaller, daha soyut modellere tamamlayıcı, kavramı öğrenenler için daha erişilebilir hale getiren somut bir temsil görevi görebilir (Fuson ve Briars, 1990; McNeil ve Jarvin, 2007; Moyer, 2001). Buna göre, çalışmanın ana bulgularından biri, öğretmen adaylarının basamak değeri anlamlandırma süreçlerinde somut materyali literatürde varolan (Van de Walle vd., 2018) orantısız model ve orantısız olmayan modelle ifade etmeye ek olarak, karma model ile de yapılandırmaları olmuştur. Karma model kullanımının, OMÖA'lar için özellikle etkili bir strateji olarak ortaya çıktığı söylenebilir, çünkü bu model basamak değerini orantılı ve orantısız olmayan şekilde modellemenin güçlü yönlerinden yararlanmalarını sağlamıştır. OMÖA'ların bir modelle başlayıp ardından diğerine geçerek basamak değeri anlayışlarını derinleştirebildikleri ve problem çözmeye daha esnek bir yaklaşım geliştirebildikleri söylenebilir. Bu da OMÖA'ların basamak değeri anlayışındaki uyum yeteneğini daha da göstermektedir.

Çalışmanın bulguları, öğretmen adaylarının (OMÖA'lar) farklı taban sistemlerinde materyal çeşitliliğini korumakta zorluk yaşadıklarını ortaya koymaktadır. Bu sorun, OMÖA'ların uygun materyalleri seçme ve kullanma konusunda yeterli deneyime sahip olmamasından kaynaklanabilir. Somut materyaller öğrencilerin matematiksel kavramları anlamalarını geliştirebilse de bu materyaller uygun şekilde seçilmediğinde kavramsal anlama süreci öğrenciler için karmaşık ve zorlu hale gelebilir (Carbonneau vd., 2013; Moyer, 2001). Taban sistemleriyle çalışmak OMÖA'lar için zorluklar oluştursa da bu zorlukların sayı sistemlerine ilişkin zihinsel şemalarının genişlemesine katkıda bulunduğu

söylenbilir. Bu bağlamda, OMÖA'ların taban sisteminden bağımsız olarak materyal çeşitliliğini koruyamaması, matematiksel anlam oluşturma sürecinde karşılaştıkları zorlukları vurgulamaktadır. Bu durum, OMÖA'ların pedagojik alan bilgilerini ve materyal kullanım becerilerini daha da geliştirmeleri gerektiğini göstermektedir (Shulman, 1987; Ball vd., 2008).

Çalışmanın bulguları, cebir karoları, tahta çubuklar ve geometri şeritlerinin gruplar tarafından basamak değerini temsil etmek için en az tercih edilen somut materyaller olduğunu; birim küpler, geçmeli birim küpler ve onluk taban bloklarının en sık seçilen materyaller olduğunu göstermiştir. Bu materyaller arasında, onluk taban blokları tüm farklı tabanlarda kullanılan tek materyaldir. Onluk taban bloklarına olan bu tercih, basamak değeri ilişkilerinin açıkça temsil edilmesine bağlanabilir. Blokların farklı boyutları (birlikler, çubuklar, küpler vb.) 10'luk sistemdeki basamak değerlerine doğrudan karşılık gelir ve bu da öğrenenlerin kavramı görselleştirmesini ve anlamasını kolaylaştırır (Hiebert ve Wearne, 1992; Ross, 1989). Cebir karoları, tahta çubuklar ve geometri şeritleri, basamak değeriyle açık bir bağlantılarının olmaması nedeniyle daha az tercih edilmiş olabilir. Bu materyaller çeşitli matematiksel kavramlar için daha çok yönlü olabilir (Clements, 2000), ancak basamak değerini temsil ederken onluk taban blokları kadar hemen tanınmayabilirler. Onluk taban bloklarının çok yönlülüğü, farklı tabanlarda yaygın olarak kullanılmasının muhtemel bir nedenidir. Bu materyaller farklı basamak değeri sistemlerini temsil edecek şekilde uyarlanabilir, bu da onları çeşitli bağlamlarda basamak değerini öğretmek için değerli bir araç haline getirir (Fuson ve Briars, 1990).

Cebir karoları, karma modellemede yalnızca bir grup tarafından toplama (10'luk ve 6'lık tabanlarda) ve çıkarma (3'lük tabanda) için kullanılmıştır. 10'luk tabanda yapılan toplama işleminde, orantısız modelleme yalnızca yüzler ve binler basamağı arasında uygulanırken, diğer basamaklar için orantısız olmayan temsil kullanılmıştır. Benzer şekilde, 6'lık tabanda, başlangıçta orantılı bir yaklaşım benimsenmiş olsa da çarpımsal ilişki manipülatifte yalnızca 6^2 ve 6^3 basamak değerleri arasında yansıtılmıştır. Bu, grubun başlangıçta orantılı modelleme kullanmayı amaçladığını, ancak uygun materyallerin olmaması nedeniyle, farklı basamak değerleri arasında orantısız bir araç olarak cebir karolarını benimsediğini ve böylece karma bir model oluşturduğunu göstermektedir. Bu nedenle, cebir karoları aracılığıyla karma bir modelin kullanılması muhtemelen orantısız modelleme uygulamaya yönelik bir girişimden kaynaklanmıştır. Cebir karolarının geometrik şekilleri, yüzler ve binler basamağı arasındaki orantılı ilişkiyi temsil etmede zorluk yaratmıştır. Kare ve dikdörtgen şekilleriyle cebir karoları, alan kavramını vurgulamak ve öğrencilerin somut ve sembolik temsilleri görselleştirmelerini, manipüle etmelerini ve ilişkilendirmelerini sağlayarak cebirsel ifadeleri anlamalarını kolaylaştırmak için etkili olsa da (Çaylan, 2018; Okpube, 2016), farklı basamak değerleri arasındaki orantısız ilişkileri her zaman açıkça göstermeyebilir.

Karma modelin kullanıldığı bir başka yol ise, 3 tabanında onluk taban blokları, geçmeli birim küpler ve birim küplerin kullanılmasıdır. Burada, 3^0 , 3^1 ve 3^2 arasında orantısız bir ilişki kurulurken, 3^2 , 3^3 ve 3^4 arasında sözde orantısız bir ilişki oluşturulmuştur. Böylece, 6'lık taban sisteminde daha önceki kullanıma benzer şekilde, karma model orantısız modellemeden yararlanmıştır. Sayısal olarak oranları temsil etmek için yeterli sayıda geçmeli birim küp veya birim küp olmasına rağmen, öğretmen adayları iki boyutlu ve üç boyutlu biçimlerde basamak değerleri arasındaki çarpımsal ilişkiyi kurmak için onluk taban blokları ve cebir karolarının geometrik şekillerini kullanmayı uygun bulmuşlardır. Sonuç olarak, onluk taban bloklarının tasarımı, basamak değerini temsil etmede cebir karolarına uyarlanmanın yolunu açmış olabilir.

Sınırlamalar ve Öneriler

24 üçüncü sınıf matematik öğretmen adayından oluşan örneklem, matematik öğretmeni adaylarının tümünü temsil etmeyebilir ve bu da bulguların genellenebilirliğini sınırlandırabilir. Çalışma Türkiye’de yapılmıştır ve bulgular farklı eğitim sistemlerine veya kültürel bağlamlara sahip diğer bölgeler veya ülkeler için geçerli olmayabilir. Katılımcıların etkinliği grup halinde tamamlaması, bireysel katkıları ve basamak değeri anlayışını etkileyebilir ve bireysel öğrenme çıktıları değerlendirilmeyi zorlaştırabilir. Çalışmanın dört haftalık süresi, basamak değeri anlayışındaki uzun vadeli değişiklikleri gözlemlemek için yeterli olmayabilir. Matematik laboratuvarı çeşitli somut materyaller sağlarken, bu materyallerin kullanılabilirliği sınırlı olabilir ve bu da katılımcıların seçimlerini ve deneyimlerini etkileyebilir.

Bu etkinliğe somut materyallerin dahil edilmesiyle, sayı doğrusu modelleri (Roy, 2014) veya bağlamsal durumlar (McClain, 2009; Yackel vd., 2007) kullanarak farklı tabanlarda aritmetik işlemlerin sorgulanmasını teşvik eden araştırma çalışmalarına benzer bir şekilde, öğretmen adaylarına basamak değeri için daha derinlemesine anlama fırsatı sağlamış olabilir. Bu bulgularla uyumlu olarak, öğretmen adaylarının ezberlemeye dayanmadan matematiği anlamada ve açıklamada kavramsal düşüncelerini destekleyen etkinlikler, öğrenmelerini kolaylaştırmak için geliştirilebilir.

Somut materyallerin sınırlamaları ve avantajları göz önünde bulundurularak öğretmen adaylarına düşüncelerini doğru matematiksel dilde ifade etme fırsatı verilebilir. Bu sayede, öğretmen adayları gelecekteki sınıflarında somut materyal kullanımını daha derin bir farkındalıkla uygulayabilirler. Bu süreçte, üniversite düzeyindeki matematik eğitimi derslerinde, matematik eğitimi bölümlerindeki öğretim yöntemleri derslerinde, somut materyallerin matematiksel kullanımı hakkında sorular sorulabilir. Öğretmen adaylarını basamak değerini birden fazla somut materyalle temsil etmeye teşvik etmek anlamlı bir anlayış için faydalı olabilir. Yetişkinlerin bile somut temsil olmadan alışılmadık durumları anlamakta yardıma ihtiyaç duyduğu düşünüldüğünde, matematik odaklı konularda somut materyallerin öğretmen adayları tarafından kullanımının desteklenmesi faydalı olabilir.

Öğrenmekte oldukları matematiğe daha geniş bir perspektiften sahip olmalarını desteklemek amacıyla, OMÖA'lara kavramsal içerik bilgisi desteği sağlamanın faydalı olduğunu öneriyoruz. Basamak değeri olarak içerik bilgisinin yapılandırılmasını ortaya koyduğumuz ve desteklediğimiz bu çalışmanın, diğer matematiksel kavramların bilgi yapılandırmasına ilham kaynağı olmasını umuyoruz. Bu bağlamda, öğretmen adaylarının basamak değeri kavramını somut materyaller aracılığıyla keşfetmeleri, yalnızca bu önemli kavramı derinlemesine anlamalarını kolaylaştırmakla kalmaz, aynı zamanda öğrencilere etkili bir şekilde öğretme stratejileri geliştirmelerine de yardımcı olur.

Teşekkür

Bu araştırma, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi (KSÜ) Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi tarafından 2019/3-22 M proje numarası ile desteklenmiştir. Bu çalışmanın gerçekleştirilmesini mümkün kılan mali desteklerinden dolayı Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Birimi'ne teşekkürlerimizi sunarız.

Kaynakça

- Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teacher education: Knowing and teaching mathematics for understanding. *Journal of Teacher Education*, 51(1), 29-45. <https://doi.org/10.1177/0022487100051003013>
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Baroody, A. (1990). How and when should place-value concepts and skills be taught?. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(4), 281-286. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.21.4.0281>
- Berg, B. L. (2001). *Qualitative research methods for the social sciences*. Allyn & Bacon.
- Cady, J. A., Hopkins, T., & Hodges, T. E. (2008). Lesson study as professional development for mathematics teacher educators. *Inquiry into Mathematics Teacher Education*, 5, 119-129.
- Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380-400. <https://doi.org/10.1037/a0031084>
- Clements, D. H. (2000). Concrete manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1(1), 45-60. <https://doi.org/10.2304/ciec.2000.1.1.7>
- Conference Board of the Mathematical Sciences. (2001). *The mathematical education of teachers* (Vol. 11). American Mathematical Soc. <https://doi.org/10.1090/cbmath/011>
- Council of Higher Education. (2007). *Eğitim fakültesi öğretmen yetiştirme lisans programları*. <https://www.yok.gov.tr/Documents/Yayinlar/Yayinlarimiz/egitim-fakultesi-ogretmen-yetistirme-lisans-programlari.pdf>
- Çaylan, B. (2018). *The effects of using algebra tiles on sixth grade students' algebra achievement, algebraic thinking and views about using algebra tiles* (Thesis No. 509436) [Master's thesis, Middle East Technical University]. Council of Higher Education National Thesis Center.
- Disney, A., & Eisenreich, H. (2018). Deepening place value understanding in K-2 through explanation and justification. In *Proceedings of the Interdisciplinary STEM Teaching and Learning Conference (2017-2019)* (Vol. 2, pp. 66-73). <https://doi.org/10.20429/stem.2018.020109>
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Ev Çimen, E. (2016). Doğal sayılar. A. N. Elçi, E. Bukova Güzel, B. Cantürk Günhan, & E. Ev Çimen (Eds.), *Temel matematiksel kavramlar ve uygulamaları içinde* (pp. 19-28). Pegem Akademi.
- Fasteen, J., Melhuish, K., & Thanheiser, E. (2015). Multiplication by 10 base-5: Making sense of place value structure through an alternate base. *Mathematics Teacher Educator*, 3(2), 83-98. <https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.3.2.0083>
- Findell, B., Swafford, J., & Kilpatrick, J. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academies Press.
- Fraenkel, J. R., Wallen, N. E., & Hyun, H. H. (2012). *How to design and evaluate research in education* (8th ed.). McGraw-Hill Companies.
- Fuson, K. C., & Briars, D. J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first-and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(3), 180-206. <https://doi.org/10.2307/749373>
- Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (1996), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Erlbaum.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. MacMillan Publishing Company.

- Hiebert, J., & Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(2), 98-122. <https://doi.org/10.2307/749496>
- Hose, J. C., & Wells, T. (2013). The marriage of place and value. *Teaching Children Mathematics*, 19(8), 528. <https://doi.org/10.5951/teacchilmath.19.8.0528>
- Houdement, C. & Petitfour, E. (2019, February). *Manipulatives in special education: help or hindrance?*. Paper presented at the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht, Netherlands.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum Associates.
- McClain, K. (2009). Supporting preservice teachers' understanding of place value and multidigit arithmetic. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 281-306. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0504_03
- McNeil, N. M., & Jarvin, L. (2007). When theories don't add up: Disentangling the manipulatives debate. *Theory Into Practice*, 46(4), 309-316. <https://doi.org/10.1080/00405840701593899>
- Ministry of National Education. (2018). *İlkokul ve ortaokul matematik dersi öğretim programı*. T.C. Milli Eğitim Bakanlığı.
- Mix, K. (2010). Spatial tools for mathematical thought. In K. Mix, L. Smith, & M. Gasser (Eds.), *The spatial foundations of language and cognition* (pp. 41-66). Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199553242.003.0003>
- Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 175-197. <https://doi.org/10.1023/A:1014596316942>
- Nataraj, M. S., & Thomas, M. O. (2009). Developing understanding of number system structure from the history of mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 96-115. <https://doi.org/10.1007/BF03217547>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author.
- Okpube, N. M. (2016). Card games and algebra tic tacmatics on achievement of junior secondary students in algebraic expressions. *International Journal of Evaluation and Research in Education*, 5(2), 93-100. <https://doi.org/10.11591/ijere.v5i2.4527>
- Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2014). *Helping children learn mathematics* (11th ed.). John Wiley & Sons.
- Rojo, M. M., Knight, B., & Bryant, D. P. (2021). Teaching place value to students with learning disabilities in mathematics. *Intervention in School and Clinic*, 57(1), 32-40. <https://doi.org/10.1177/1053451221994827>
- Ross, S. H. (1989). Parts, wholes, and place value: A developmental view. *The Arithmetic Teacher*, 36(6), 47-51. <https://doi.org/10.5951/AT.36.6.0047>
- Roy, G. J. (2014). Developing prospective teachers' understanding of addition and subtraction with whole numbers. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal*, 2, 1-15.
- Rusiman, M. S., & Him, N. C. (2017). The use of concrete material in teaching and learning mathematics. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 12(8), 2170-2174.
- Saldaña, J. (2021). *The coding manual for qualitative researchers*. Sage Publications.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>

- Tarım, K., & Artut, P. D. (2013). Preservice teachers' levels of understanding of place value and numeration systems. *İlköğretim Online*, 12(3), 759-769.
- Thanheiser, E. (2009). Preservice elementary school teachers' conceptions of multidigit whole numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 251-281. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.40.3.0251>
- Thanheiser, E., & Rhoads, K. (2009). Exploring preservice teachers' conceptions of numbers via the Mayan number system. In S. Swars, D. Stinson, & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the thirty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 1220-1227). Georgia State University.
- Thompson, P. W., & Lambdin, D. (1994). Research into practice: Concrete materials and teaching for mathematical understanding. *The Arithmetic Teacher*, 41(9), 556-558. <https://doi.org/10.5951/AT.41.9.0556>
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Williams, J. M. B. (2018). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Longman.
- Yackel, E., Underwood, D., & Elias, N. (2007). Mathematical tasks designed to foster a reconceptualized view of early arithmetic. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4), 351-367. <https://doi.org/10.1007/s10857-007-9044-x>
- Yin, R. K. (2003). *Case study research design and methods* (3rd ed.). Sage Publications.