



İspat İşlevleri ile Sosyal ve Sosyo-Matematiksel Normlar Arasındaki İlişkiler: KARİDE Modelinden Yansımalar *

Tuğba Yulet Yılmaz¹, Nilüfer Yavuzsoy Köse²

Öz

İspat ile matematiksel önermelerin doğruluğunun gösterilmesi işlevinin yanı sıra açıklama, keşif, sistematikleştirme ve iletişim gibi işlevleri de ortaya çıkar. İspat öğretiminin sınıflarda anlamlı ve derin bir matematik etkinliğine dönüşmesi için tüm işlevlerinin işe koşulması önemlidir. Matematiksel ispat ve muhakeme sosyal bir süreç olduğundan özellikle ortaokul düzeyindeki öğrencilere ispatın önemi ve gerekliliği gösterilirken öğretim birtakım normlardan etkilenir. Dolayısıyla öğretmenlerin hem ispat işlevlerini hem de sosyal ve sosyo-matematiksel normları dikkate alması öğrencilerin muhakeme süreçlerini destekler. Bu doğrultuda bu araştırmanın amacı; öğrencilerin etkileşim kurarak ispat problemlerini çözebilmelerine imkân tanıyan bir öğrenme ortamında ispat işlevlerini, sosyal ve sosyo-matematiksel normları ve ispat işlevleri ile normlar arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmaktır. Çalışmanın katılımcıları İç Anadolu Bölgesi'nde yer alan bir devlet ortaokulunda öğrenim gören 7. sınıf öğrencilerinden oluşmaktadır. İspat işlevlerinin ortaya çıkarılması ve normların oluşturulması gerçek bir öğrenme ortamında uzun süreli etkileşimi gerektirdiği için bu çalışmada öğretim deneyi yöntemi benimsenmiş ve 12 haftalık öğretim sürecinden elde edilen video ve ses kayıtları ile çalışma kâğıtları analiz edilerek bulgular sunulmuştur. Araştırmanın sonuçları sınıf topluluğunun tartışma, problem çözme, gerekçelendirme ve iş birliği konularında ortak normlar geliştirdiğini, bu sosyal ve sosyo-matematiksel normların öğrencilerin tartışmalara katılımını yönlendirdiğini ve katkılarının kalitesini artırdığını göstermiştir. Ayrıca araştırmada normlar ile ispat işlevlerinin diyaloglarda iç içe geçtiği, hem farklı temalardaki normların hem de ispat işlevlerinin birbirleri ile ilişkili oldukları görülmüştür. Araştırmada tartışma ve iş birliği temasındaki normların özellikle ispatın iletişim işlevini desteklediği, gerekçelendirme ve problem çözme temasındaki normların ise

Anahtar Kelimeler

İspat işlevleri
Matematiksel ispat
Matematiksel muhakeme
Sınıf mikrokültürü
Sosyal normlar
Sosyo-matematiksel normlar

Makale Hakkında

Gönderim Tarihi: 25.05.2023
Kabul Tarihi: 08.02.2025
Elektronik Yayın Tarihi: 25.04.2025

DOI: 10.15390/EB.2025.12938

* Bu makale Tuğba Yulet Yılmaz'ın Nilüfer Yavuzsoy Köse danışmanlığında yürüttüğü "7. sınıf öğrencilerinin kanıtlama süreçlerinin ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevlerinin incelenmesi" başlıklı doktora tezinden üretilmiştir.

¹ Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, tugbayulet@gmail.com

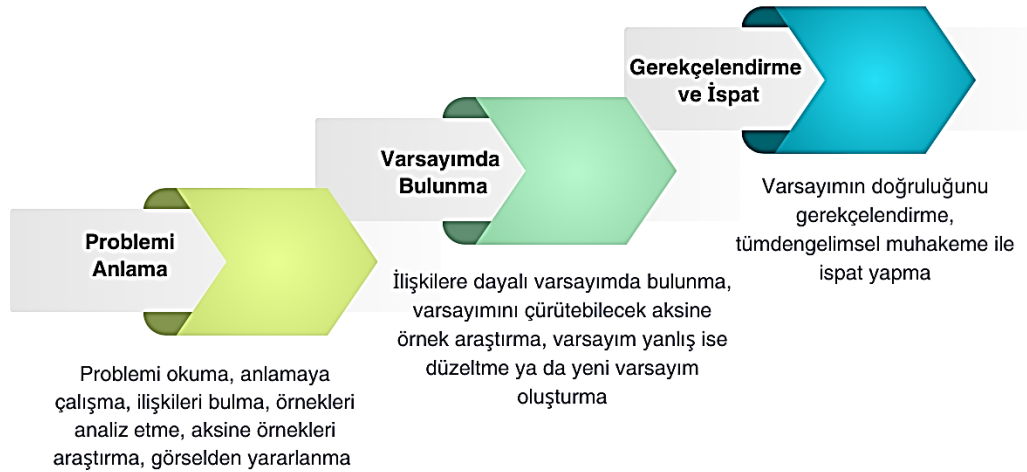
² Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, nyavuzsoy@anadolu.edu.tr

özellikle ispatın doğrulama, açıklama, keşif ve sistematikleştirme işlevini desteklediği belirlenmiştir. İspatın sosyal yönüne ağırlık verilerek farklı sınıf düzeylerinde sosyal ve sosyo-matematiksel normlar ile ispat işlevlerinin birbirlerini nasıl desteklediğini gösteren çalışmaların yapılması önerilebilir.

Giriş

Sorgulayan, araştırma ve ikna etme yeteneği güçlü; kendi deneyimleri ile bilgiyi oluşturabilen ve kullanabilen; iletişime ve iş birliğine açık bireyler bilgi ve teknoloji toplumlarını şekillendirmede fark yaratma potansiyeline sahiptir. Bu anlamda günümüz toplumlarında gerçek yaşam problemlerini çözmede matematiği kullanma, matematik dilinde iletişim kurma, geçerli argümanlar oluşturma ve matematiksel muhakeme büyük önem arz etmektedir.

Matematiksel muhakemenin, matematiksel yeterliklerin temelini oluşturduğu ve matematik öğretiminde muhakeme eksikliğinin öğrenme sürecinde başarısızlığa neden olacağı belirtilirken (Battista, 2017), matematiksel ispat da muhakeme sürecine bağlı olarak tanımlanmaktadır. Örneğin Jahnke (2010) ispatı, tümevarım ve tümdengelim dayalı muhakemeyi içeren bir yapı olarak tanımlarken; Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (2000) [NCTM], belirli muhakeme ve gerekçelendirme biçimlerini göstermenin formel bir yolu olarak tanımlamaktadır. Benzer şekilde Toker (2020) ispatı, öğrencilerin muhakeme yapmaları, düşüncelerini nedenleriyle birlikte açıklamaları, varsayımda bulunmaları, çıkarım yapmaları, düşüncelerini test etmeleri ve sonuca ulaşmaları gibi matematiksel düşünceyi ve söylemleri geliştirebilecek bir araç olarak tanımlamaktadır. Matematiksel ispatı süreç olarak gören araştırmacılar ispat tanımı oluştururken bu sürecin aşamalarından faydalanmışlardır (Baki, 2006; Dogan, 2015; Tall, 1998). Bu araştırmacıların çalışmaları incelendiğinde ispatlama sürecinin 1) *Problemi Anlama*, 2) *Varsayımda Bulunma* 3) *Gerekçelendirme ve İspat* olmak üzere iç içe geçmiş üç aşamadan oluştuğu görülmektedir. Özellikle okul matematiğindeki ispat etkinliklerinde kullanılabilecek ispatlama süreci ve bu süreçte ortaya çıkması beklenen eylemler Şekil 1’de sunulmuştur:



Şekil 1. İspatlama Sürecinin Aşamaları

Bununla birlikte matematiksel ispatın sosyo-kültürel yönlerine vurgu yaparak ispat tanımı ortaya koyan pek çok araştırmacı mevcuttur (Almeida, 2003; Fredriksdotter, Nor'en ve Bråting, 2022; Hersh, 2009; Jones ve Herbst, 2012; Maher, 2009; Stylianides, 2007). Örneğin Stylianides (2007) ispatı sosyal olarak inşa edilen, geçerliliği sınıf normlarına bağlı olan iddialar dizisi olarak tanımlamaktadır. Bu doğrultuda Stylianides'in, matematiksel bir argümanın ispat sayılabilmesi için, sınıf tarafından gerekçeye ihtiyaç duyulmadan kabul edilen ifadeler ile ispat yapılmasına, sınıfın düzeyine uygun ve kavramsal olarak erişebileceği argümantasyon biçimlerinin kullanılmasına ve ispatın çoklu temsiller yoluyla iletilmesine vurgu yaptığı görülmektedir. Fredriksdotter ve diğerleri (2022) ispatı, öğrencilerin bir matematik probleminin çözümüne nasıl ulaştıklarına dair açıklamalarından ve bu çözümü desteklemek ya da çürütmek için kullandıkları argümanlardan oluşan iletişimsel gerekçelendirme uygulamaları olarak görmektedir. Ayala-Altamirano ve Molina (2021) ise matematiksel bilginin açıklandığı, doğrulandığı ve sistematik hale getirildiği sosyal sürece vurgu yaparak gerekçelendirme ve ispatın sosyal yönlerine dikkat çekmektedir. Bu tanımlar, bir topluluğun bireyleri arasındaki etkileşim sonucunda topluluk üyelerini ikna etme ile geçerli ispat kavramına ulaşılabilesine, ispatın matematik sınıflarında öğrencilerin muhakemelerini iletmede kullanılan sosyal bir etkinlik olmasına, dolayısıyla ispatın sosyal bir süreç olarak ele alınması gerekliliğine vurgu yapmaktadır. İspat işlevlerinin ispatın bu sosyal sürecine işaret ettiği belirtilebilir.

Bir ispatın hangi amaca hizmet ettiği, ispatın sınıfta hangi rolü oynadığı, ispatı yapan ya da yapılan bir ispatı yorumlayan kişinin bu ispata hangi anlamı yüklediği ispat işlevleri ile açıklanmaktadır (Bell, 1976; De Villiers, 1990; Hanna, 2000). De Villiers (1990, 1999) ispatın "doğrulama", "açıklama", "iletişim", "keşif", "sistematikleştirme" ve "zihinsel meydan okuma" olmak üzere altı işlevi olduğunu belirtmektedir. Doğrulama işlevi ispatın bir varsayımın tüm durumlar için doğru olduğunu göstermek amacıyla yapılmasını; açıklama işlevi, ispatın bir varsayımın neden doğru olduğuna dair kavrayış elde etmek amacıyla yapılmasını ifade etmektedir (De Villiers, 1990). Bununla birlikte iletişim işlevi; ispat ile elde edilen sonuçların paylaşılmasını, geçerliği ve öneminin tartışılmasını, doğruluğunun farklı kişilerce kabul edilmesi ya da reddedilmesini kapsayan sosyal etkileşim anlamına gelmektedir (Herbst, Miyakawa ve Chazan, 2010). Keşif işlevi yeni sonuçlarının keşfedilmesini, yeni fikirlerin ya da varsayımların üretilmesini belirtirken, sistematikleştirme işlevi, sonuçların tümdengelsel bir sistem içinde düzenlenmesini ifade etmektedir (De Villiers, 1990; Dennis, 2000; Hanna, 1983; Knuth, 2002). Zihinsel meydan okuma ise ispatın, bir matematikçinin entelektüel dayanıklılığını ve yaratıcılığını test ettiği bir alan olmasını ve böylece zihinsel bir zorlanmanın üstesinden gelinmesi ile elde edilen memnuniyeti ifade etmektedir (De Villiers, 1999). Bununla birlikte Bartlo (2013), yaptığı çalışma sonucunda De Villiers'ın ispat işlevlerinden beşini Tablo 1'de gösterildiği gibi alt işlevleri ile tanımlayarak detaylandırmıştır:

Tablo 1. İspat İşlevleri ve Alt İşlevleri (Bartlo, 2013)

İspat İşlevleri	İspatın Alt İşlevleri	Alt İşlev Göstergeleri
Doğrulama	Doğru olduğuna ikna olma	İspat öğrencileri varsayımlarının doğru olduğuna ikna ederek şüpheden kurtulmalarını, kendi fikirlerini doğrulamalarını ve özerk öğrenenler olmalarını sağlamaktadır.
	Doğruluğunu onaylama	İspatlanan bir ifadenin doğruluğunun sınıf tarafından kabul edilmesiyle bu ifadenin doğruluğu onaylanmakta ve bu ifade sınıfın ortak kabulü haline gelmektedir.
Açıklama	Kavrayış sağlama	İspat matematiksel bir olgunun neden doğru olduğuna ve nasıl çalıştığına dair kavrayış sağlamaktadır.
	Sonuçları görme	Bir teorem başka bir teoremin ispatında kullanıldığında o teoremin sonuçlarını görmek, öğrencilerin ispatta kullanılan kavramlar hakkında bilgi edinmelerine yardımcı olmaktadır.
İletişim	Söylem biçimini ortaya çıkarma	İspat öğretmen ile öğrenci ya da öğrenci ile öğrenci arasında matematiksel sonuçların iletilmesini sağlamaktadır.
	Tartışma ortamı yaratma	İspat öğrencilerin hatalarını düzeltebilecekleri kritik tartışmaların yapılacağı bir tartışma ortamı yaratılmasını sağlamaktadır.
Keşif	Araştırma	İspat varsayımların sonuçlarının araştırılmasını sağlayarak yeni sonuçların keşfedilmesini mümkün kılmakta, öğrencilerin var olan bilgilerinden yola çıkarak yeni matematiksel fikirleri öğrenmelerini sağlamaktadır.
	Analiz	Yapılan bir ispatın analiz edilmesiyle birlikte daha genel sonuçların keşfedilmesi sağlanmaktadır.
Sistemati- leştirme	Tutarsızlıkları ortaya çıkarma	İspat öğrencilerin tutarsızlıkları görmelerine, karşı örnekler ve argümanlara yanıt vererek matematik öğrenmelerine yardımcı olmaktadır.
	İlişkileri ortaya çıkarma	İspat kavramlar arasındaki ilişkileri görünür hale getirerek bilginin sistematikleştirilmesini sağlamaktadır.
	Küresel perspektif sağlama	İspat bir konunun altında yatan, konuyla ilgili diğer özelliklerin elde edileceği aksiyomatik yapıyı ortaya çıkararak bilginin sistematikleştirilmesini sağlamaktadır.
	Uygulama	İspat öğrencilerin çözümlerini genellemelerine yardımcı olarak, karşılaştıkları farklı problemlere bu çözümleri uygulayabilmelerini sağlamaktadır.
	Alternatif sistemlerin ortaya çıkmasını sağlama	İspat yeni düşünme biçimlerinin geliştirilmesini, farklı tümdengelimsel sistemlerin ortaya çıkmasını sağlamaktadır.

Öğrencilerin ispatın işlevlerini deneyimlemeleri, bir yandan ispatı anlamalarını ve ispat uygulamalarına katılımlarını desteklemekte (Hemmi, 2010) öte yandan ispatın matematik bilminde oynadığı rolün matematik sınıflarına yansımaları sağlayarak bu sınıflarda ispatın daha anlamlı bir etkinlik olmasının önünü açmaktadır (Hanna, 1995; Knuth, 2002). İspatın bir topluluğu matematiksel bir ifadenin doğruluğuna ikna etmede bir araç olarak kullanıldığı ve ikna edici olabilmesi için o topluluğunun normlarıyla uyumlu olması gerektiği belirtilmektedir (Harel ve Sowder 2007; Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron ve Winicki-Landman, 2012). Benzer şekilde sınıf topluluğunun bir iddianın doğruluğunu onaylayabilmesi için yapılan ispatın sınıfın sosyal ve sosyo-matematiksel normlarına uygun olması gerekmekte ve zaman içinde ispat, bu normları değiştirmekte ve şekillendirmektedir.

Topluluk; ortak kültürel değerleri paylaşan bireylerin oluşturduğu bir grup olarak tanımlanmakta ve her sınıfın, öğretmen ve öğrencilerin bir araya geldiği, ortak hedefleri paylaştığı, tartıştığı ve rollerini şekillendirdiği bir topluluk olduğu belirtilmektedir (Sekiguchi, 2006). Bu noktada

sınıf ortamında öğretmen ve öğrencilerin karşılıklı etkileşimleri ile ortaya çıkan, o sınıfı diğer sınıflardan ayıran bir mikrokültür oluşmaktadır (Cobb, Stephan, McClain ve Gravemeijer, 2011; Levenson, Tirosh ve Tsamir, 2009). Her sınıfta, sınıf üyeleri tarafından ortaya konulan, sınıfın her üyesinin ne yaptığı ve neye değer verdiği konusundaki davranışlarını belirleyen örtük ve açık anlayışlar bulunmaktadır (Makar ve Fielding-Wells, 2018). Sınıfta öğretmen ve öğrencilerin iletişim ve etkileşimleri sonucunda ortaya çıkan karşılıklı beklentiler, sınıf etkinliklerindeki düzenliliği betimleyen, öğretmen ve öğrenciler tarafından ortaklaşa oluşturulan, zaman içinde gelişen ve değişen yazılı olmayan kurallar, sosyal norm olarak ifade edilmektedir (Cobb vd., 2011). Bu normların sınıf içindeki sosyal etkileşime bağlı olarak, öğretmen ve öğrenciler tarafından devamlı yorumlandığı, dönüştürüldüğü ya da değiştirildiği belirtilebilir. Sosyo-matematiksel normlar ise matematik disiplinine özgü olan ve o topluluğun sosyal normları tarafından desteklenen normlardır (Yackel ve Cobb, 1996). Sosyal ve sosyo-matematiksel normlar; öğrenci ve öğretmen rolleri, matematiksel etkinliğin genel doğasına ilişkin inançlar, matematiksel inançlar ve değerler ile öğrencilerin matematiksel kavrayışlarıyla bağlantılıdır (Cobb vd., 2011). Ayrıca bu normların, matematik öğreniminde sorgulamaya dayalı, işbirlikçi yaklaşımlar ile uygulandığında, öğrencilerin matematiksel tartışmalara katılımlarına rehberlik ettiği ve katkılarının niteliğini arttırdığı bilinmektedir (Partanen ve Kaasila, 2015). Bu doğrultuda tartışmaya dayalı sınıf içi etkinliklerde öğrencilerin bu etkinliklere katılımını yönlendirmede, öğrencileri teşvik etmede ve gelişimlerini desteklemede normların son derece önemli olduğu belirtilebilir.

Yapılan çalışmalar incelendiğinde, sosyal ve sosyo-matematiksel normların sınıf içindeki doğasını ve gelişimini ele alan çalışmalarla birlikte (McClain ve Cobb, 2001), sınıf içinde normların oluşturulmasında ve geliştirilmesinde tartışma ve sorgulamaya dayalı sınıf ortamlarını, öğretmenin rolünü, kullandığı stratejileri, sosyal ve sosyo-matematiksel normların ilişkisini ele alan çalışmaların olduğu görülmektedir (Ozdemir-Baki ve Kilicoglu, 2023; Sekiguchi, 2006). Üstün yetenekli öğrencilerin problem çözme etkinliklerine katıldıkları bir sınıfta oluşan sosyo-matematiksel normlar (Çakır, 2021; Çakır ve Akkoç, 2024) ile öğrenme güçlüğü yaşayan öğrencilerin bulunduğu bir sınıftaki sosyo-matematiksel normları inceleyen çalışmalar (Öksüz ve Güreffe, 2021) da mevcuttur. Örneğin Çakır (2021) çalışmasında sosyal ve sosyo-matematiksel normları “Açıklamalar”, “Sınıf tartışmaları”, “Problem çözme”, “Problem kurma”, “Değer verme”, “Sorgulama” ve “İş birliği” başlıklarıyla isimlendirilmiş ve normun delili olarak kabul edilen beklenti, farkındalık ve eylemleri, öğretmen ve öğrenci boyutları için tanımlanan göstergeler ile ele almıştır. Ayrıca öğrencilerin ispat yapabilme becerilerinin gelişimi için oluşturulan tartışmaya dayalı sınıf ortamında öğretmenin pedagojik seçimlerini, öğretmen ve öğrenci eylemlerinde ortaya çıkan sosyo-matematiksel normları inceleyen ve ispatın sosyal yönüne vurgu yapan araştırmaların da olduğu görülmüştür (Martin, McCrone, Bower ve Dindyal, 2005). Bu çalışma ise ortaokul öğrencilerinin ispatlama süreçlerinde ortaya çıkan ispat işlevlerini, süreç boyunca ortaya çıkan normları ve ispat işlevleri ile normlar arasındaki ilişkileri derinlemesine incelediğinden diğer çalışmalardan ayrılmaktadır.

İlköğretim düzeyinde yapılan ispat odaklı çalışmalarda ispatın tüm sınıf düzeylerinde ele alınması gerektiği vurgulanmaktadır (Cervantes-Barraza, Moreno ve Rumsey, 2020; Mudaly, 2007; Rocha, 2019). Bu araştırmalarda lise döneminde formel ispat ile tanışmanın ispatın ve matematiğin doğasına aykırı olduğu, daha az formel ve daha sezgisel olandan formel ispata geçişin gerekli olduğu, ispat işlevlerinin ve ispatın sosyal yönünün ön plana çıkarılması gerektiği ifade edilmektedir. Son yıllarda, matematik eğitimi araştırmalarında, öğrencilerin yeni bilgi inşa etme sürecinde iletişim becerisi oldukça fazla dikkat çekmekte (Hanna ve Knipping, 2020), matematik öğrenmenin sosyal yönüne artan ilgi ile birlikte sınıflarda öğrencilerin birbirleri ve öğretmen ile etkileşim örüntülerinin nasıl sosyal ve sosyo-matematiksel norma dönüştüğü de yeni araştırmaların önünü açmaktadır (Partanen ve Kaasila, 2015). Ancak öğrencilerin matematiksel argümantasyonları ve ispatları üzerine yapılan birçok çalışmanın, bireysel bilişsel süreçlere odaklandığı bilinmektedir (Campbell, Boyle ve King, 2020). Öğrencilerin ispata karşı olumsuz tutum geliştirme ve ispat yapamama nedenlerinden birinin öğrencilere ispatın rolü ve anlamına ilişkin yeterli bilgi verilmemesi ve ispatın sosyal yönünün ihmal edilmesi olduğu da belirtilmektedir (Mudaly, 2007). Bu bağlam göz önünde bulundurularak bu çalışmada öğrencilerin sosyal etkileşimin üst düzeyde olduğu bir sınıfta ispat etkinliklerine katılmaları

ve ispat işlevlerini deneyimlemeleri sağlanmıştır. Nitekim öğrencilerin geliştirdikleri argümanları savundukları, destekleyebildikleri, başkalarının argümanlarını değerlendirdikleri ve çürütmeye çalıştıkları ortamlar oluşturulması, bu ortamlarda matematiksel gerekçelendirmeler yaparak matematiksel kavramların ve süreçlerin inşasını anlamaları ve bu sürece aktif olarak katılmaları oldukça önemlidir (Chua, 2016; Yılmaz, 2021). Matematik eğitiminde özellikle okul matematiğinde ispat ve muhakemenin önemi vurgulanmasına rağmen, ortaokulda öğrencilerin muhakeme ve ispat deneyimleri, bu öğrencilerin matematiksel ispata yükledikleri anlam, matematiksel ispat yapma sürecinde geliştirdikleri stratejiler bağlamında literatürde boşluk olduğu görülmektedir. İspatın tüm sınıf düzeylerinde matematik eğitiminin bir parçası olması gerektiği vurgusuna karşın (Campbell vd., 2020; Fredriksdotter vd., 2022), öğrencilerin lisede ispat ile tanıştıkları ve yapılan çalışmaların büyük bir çoğunluğunun da lise ve lisans düzeylerinde yapıldığı belirtilmektedir (Rocha, 2019). İspatın matematik sınıflarında işlevini, önemini ve sınırlarını tartışmak ve matematik eğitiminde ispat kullanmanın en etkili yollarını bulmak önemli bir gerekliliktir (Hanna, 2000).

Tüm bu nedenlerden ötürü, bu çalışmada öğrencilerin ispatlama deneyimini grup ve sınıf tartışmalarıyla, sosyal etkileşimin üst seviyede olduğu bir sınıf ortamında yaşamalarının sonuçları merak edilmiş ve bu amaçla Mason, Burton ve Stacey'in (2010) ispatlama süreci aşamalarından uyarlanarak ispat uygulamalarında kullanılan ve normlarla desteklenen ispat öğrenme modeli "KARİDE" [Kendini-Arkadaşını-Rakibini İkna Et-Değerlendirme] oluşturulmuştur. KARİDE modeline göre oluşturulan öğrenme ortamında ispat sosyal bir süreç olarak ele alınmıştır. Bu süreçte öğrencilerin kendileri için yeni olan problem durumlarıyla karşılaşmaları, bu problemlerin doğruluğunu araştırmaları, problemleri çözerken yaptıklarını ve söylediklerini devamlı gerekçelendirmeleri, buldukları sonuçların nedenlerini kendilerinin keşfetmeleri, matematiksel dili kullanarak birbirleriyle iletişim halinde olmaları ve tüm bu işlemleri belirli bir sistematik içinde yapmaları hedeflenmiştir. Bu öğrenme ortamında ortaya çıkan ispat işlevlerine ve sınıf mikrokültüründeki öğrenci ve öğretmen eylemlerinden doğan sosyal ve sosyo-matematiksel normlara ve ispat işlevleri ile normların birbirini nasıl desteklediğine odaklanılarak aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

- KARİDE modeline göre oluşturulan öğrenme ortamında ortaya çıkan ispat işlevleri nelerdir?
- KARİDE modeline göre oluşturulan öğrenme ortamında ortaya çıkan sosyal ve sosyo-matematiksel normlar nelerdir?
- KARİDE modeline göre oluşturulan öğrenme ortamında ispat işlevleri ve normlar arasındaki ilişki nasıldır?

Yöntem

Araştırma Deseni

Öğrencilerin ispatlama süreçlerinde ortaya çıkan ispat işlevlerinin, sosyal ve sosyo-matematiksel normların detaylı olarak incelenmesi için bu çalışmada öğretim deneyi deseni kullanılmıştır. Ardışık öğretim oturumlarından meydana gelen öğretim deneyinde döngüsel bir yaklaşım izlenmekte, her bir öğretim oturumu bir öğretim temsilcisi (öğretmen) bir ya da daha fazla öğrenci ve oturumların analizi için öğretimin kaydedilmesini içermektedir (Steffe ve Thomson, 2000). Yeni öğrenme modellerinin ortaya konulmasına yardımcı olan öğretim deneyinin en kritik özelliklerinden biri de araştırmacının öğretmen rolünü üstlenmesidir (Steffe, 1991). Bu çalışmada, ardışık öğretim oturumlarından oluşan döngüsel bir süreç izlenmiş, her bir öğretim oturumunun planlanmasına bir önceki oturumun analiz sonuçları rehberlik etmiş ve araştırmacı öğretmen rolünü üstlenmiştir.

Katılımcılar

Çalışmanın katılımcıları İç Anadolu Bölgesi'nde yer alan bir devlet ortaokulunda öğrenim gören 7. sınıf öğrencilerinden oluşmaktadır. Katılımcılar belirlenirken nitel araştırmaların gereksinimleri göz önünde bulundurulmuş ve zengin veriye erişme imkânı sunacak özellikte katılımcı seçilmesi gerektiği (Yalman ve Uzungöz, 2021) düşünülmüştür. Bu nedenle katılımcıların seçiminde

amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Amaçlı örnekleme, araştırma sürecinde problemi aydınlatacak zengin bilgi içeren durumların derinlemesine incelenmesi amacıyla kullanılırken (Meydan, 2021), ölçüt örnekleme, önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan durumların çalışılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). 7. sınıf öğrencilerinin informal ispat ile formel ispat arasında geçiş evresinde bulunmaları, araştırmacıların birinin mevcut çalışmanın yapıldığı dönemde bu sınıfın matematik dersinin öğretmenliğini yapıyor olması, sınıfın grupla çalışmaya elverişli olması ve bu sınıfın öğrencilerinin araştırmaya katılmaya gönüllü olması belirlenen ölçütlerden bazılarıdır. Bu ölçütler doğrultusunda aynı sınıfta bulunan 15'i kız, 16'sı erkek olmak üzere 31 öğrenci çalışmanın katılımcılarını oluşturmuştur. Araştırmaya başlamadan önce öğrencilere gönüllü onam formu, velilere de araştırma izin formu imzalatılmıştır. Öğretim uygulamalarının başında sınıf *Efsanevi Matematikçiler, Turunçgiller, Çalışkan Arılar ve Starlar* olmak üzere dört küçük gruba ayrılmıştır. Her sınıfın sosyal ve sosyo-matematiksel normları önceki deneyimlerine göre farklılaştığı için, araştırmacı-öğretmen normları başlatmada ve sürdürmede araştırmaya başlamadan önceki gözlemlerine dayanarak bu sınıfın mikrokültürünü dikkate almıştır.

Araştırma Ortamı

Öğretimin uygulandığı sınıfta oturma düzeni olarak bireysel ve grupla çalışma yapmaya elverişli olan çok gruplu yerleşim düzeni benimsenmiştir. Sınıfta etkinlikler sırasında kullanılan video kameralar (biri önde biri arkada) öğrencileri, araştırmacıyı ve tahtayı görebilecek ve öğrencilerin dikkatini dağıtmayacak şekilde yerleştirilmiştir. Bununla birlikte veri kaybını önlemek üzere grupların masalarına ses kayıt cihazı yerleştirilmiştir.

Veri Toplama Araçları ve Veri Toplama Süreci

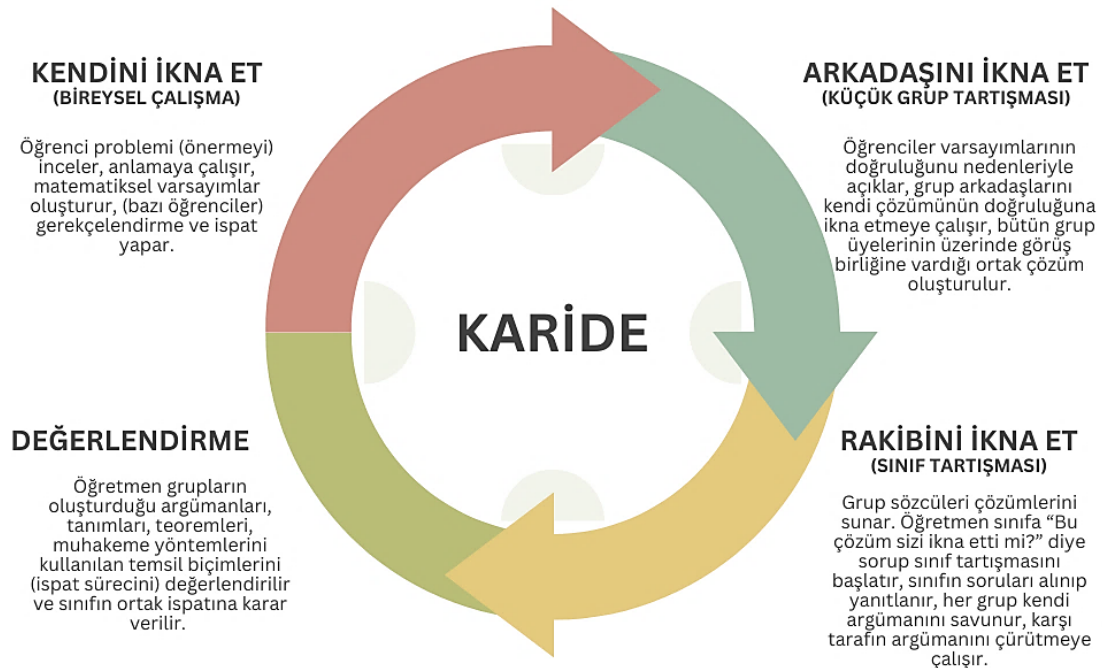
Bu araştırma için Anadolu Üniversitesi'nden 23.01.2019 tarih ve 54380210-050.99 sayılı Etik Kurul İzni ve Eskişehir İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden 26.02.2019 tarih ve 12377788-604.01.02-E.4196611 sayılı izin ile araştırma kapsamındaki verilerin toplanmasına onay alınmıştır.

Araştırmada veriler; öğretim uygulamalarının ses ve video kayıtları, küçük grup tartışmalarında etkinliklerde kullanılan çalışma kâğıtları ve öğretmenin günlüğüne yazdığı notlardan elde edilmiştir. Bu çalışma kapsamında öğretim uygulamalarındaki normlar ve ispat işlevleri arasındaki bağlantıya odaklanıldığından 12 haftalık öğretim sürecinden elde edilen bulgular sunulmuştur. 12 hafta süren öğretim uygulamalarına başlamadan önce sınıfta matematiksel olarak geçerli kabul edilecek bir argümanın özelliklerinin, argümantasyon yönteminin (doğrudan ispat, aksine örnek verme gibi) ve argüman temsil biçimlerinin (cebirsel, görsel, sözel temsiller gibi) çerçevesinin çizilmesi (Stylianides, 2007) için 2 ders saati süren ispata giriş dersi yapılmıştır. Bu derste araştırmacı-öğretmen bu sınıfta geçerli kabul edilecek argümantasyon yöntemlerini öğrencilere sunmuş, matematiksel açıklamaların ve gerekçelerin kabul edilebilir olması için dayandırılması gereken matematiksel temelleri açıklamıştır. Bu bağlamda, örnek vermenin ispat yapmadaki sınırlı rolü, gerekçe olmadan geçerli kabul edilecek bir argümanın özellikleri (tanımlar gibi), ispat yaparken problemi (önermeyi) anlamak için örneklerden yararlanılabileceği, bu örneklerin stratejik örnekler olmasının önemli olduğu belirtilmiş; ancak örneklerle denemenin bu sınıfta geçerli bir ispat yöntemi olarak kabul edilmeyeceği vurgulanmıştır. Bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için aksine bir örnek vermenin yeterli olduğu anlatılmış ve ders boyunca öğrencilerin ulaştıkları sonuçların neden doğru olduğunu açıklamaları gerektiği belirtilmiştir. Bu şekilde öğretmen kabul edilebilir matematiksel açıklamalar ve gerekçeler sunma, geçerli bir matematiksel ispat sunma, deneysel doğrulamayı geçerli ispat olarak kabul etmeme, problemlere farklı gerekçelendirmeler sunma gibi sosyal ve sosyo-matematiksel normları başlatmıştır.

12 hafta boyunca haftada bir gün 2 ders saati (80 dk.) olmak üzere toplam 24 ders saati olacak şekilde sınıf çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Sınıf çalışmalarında kullanılan etkinliklerin seçiminde pilot çalışma bulguları, öğrencilerin uygulamanın başladığı süreçte bildikleri, öğretim programı içerisinde önceki ders yıllarında işlemiş oldukları konular, süreç devam ederken öğretim programı içerisindeki konular, ispata yönelik yapılmış araştırmalar, uzman görüşleri ve bir önceki öğretim ile bir sonraki

öğretim oturumları dikkate alınmıştır. Bu doğrultuda öğrencilerin sınıf seviyesi ve pilot çalışma bulguları dikkate alınarak hazırlanan etkinlikler ve bu etkinliklerde öğrencilerin kavramsal olarak algılayabileceği düzeyde olan muhakeme yöntemleri kapsamında ele alınan ispat yöntemleri EK 1’de sunulmuştur. Sunulan etkinliklerden üç tanesi öğrencilerin doğrudan ispat yapmaları gereken sayı problem ve önermeleri, biri aksine örnek vererek ispatlamaları gereken bir önerme, dört tanesi doğrudan ispat yapmaları gereken geometri problemi, iki tanesi tüketerek ispat yapmaları gereken sayı problemi, bir tanesi bir önermenin doğruluğuna yönelik olarak sunulan dört farklı argümanı değerlendirme problemi, bir tanesi ise örüntü problemidir. Öğrencilerin ispatlarını iletirken 7. sınıf öğrencilerinin düzeyleri göz önünde bulundurularak sözel, görsel ya da cebirsel temsil biçimlerinden yararlanmalarına olanak tanınmıştır.

Sınıfta ispat uygulamalarında kullanılan ve normlarla desteklenen KARİDE modelinin aşamaları Şekil 2’de sunulmuştur:



Şekil 2. KARİDE Modelinin Aşamaları

Şekil 2’de görüldüğü KARİDE modelinin a) Kendini ikna et, b) Arkadaşını ikna et, c) Rakibini ikna et ve d) Değerlendirme şeklinde dört aşaması vardır. Kendini ikna et aşaması bireysel çözümlerin yapıldığı aşamadır. Bu süreçte öğrencilerden beklenen, verilen problemi (önermeyi) incelemeleri, anlamaya çalışmaları ve matematiksel varsayımlar oluşturmalarıdır. Bu aşamada gerçekleştirilen eylemler öğrenciden öğrenciye göre değişiklik gösterebilir. Verilen süre içerisinde bazı öğrenciler sadece problemi anlamak için özel örneklerden yararlanırken, bazı öğrenciler örneklerdeki ortak özellikleri belirleyip genelleme yapabilir, bazı öğrenciler ise süreci tamamlayarak ispat yapabilir. Arkadaşını ikna et aşaması küçük grup tartışmalarının yapıldığı aşamadır. Bu süreçte öğrencilerden, bireysel çalışmalarında oluşturdukları varsayımlarının doğruluğunu nedenleriyle birlikte grup arkadaşlarına açıklamaları ve bir sonraki aşamada sınıf tarafından değerlendirilecek matematiksel bir sonuca varmış olmaları beklenmektedir. Öğretmen, arkadaşını ikna et aşaması boyunca gruplar arasında dolaşarak öğrencilerin çözüm yaklaşımlarını inceler, gerektiğinde öğrencilere düşüncelerini derinleştirmek için sorular sorabilir. Ayrıca her bir grup üyesinin çözümünü arkadaşlarıyla paylaşması, fikirlerini nedenleriyle beraber açıklaması, iş birliği yapmaları, anlamadıkları noktaları birbirlerine sormaları, diğer grup üyelerinin arkadaşlarını sözü bitene kadar dinlemeleri, birbirlerini ikna etmeleri konusunda cesaretlendirir. Böylece sınıf normlarının oluşumunu pekiştirir. Rakibini ikna et aşaması her bir grubun oluşturdukları argümanların geçerli bir ispat olup olmadığının sınıf ortamında tartışıldığı aşamadır.

Rakibini ikna et aşamasında öğretmen öğrencilerden tahtada çözüm yapan kişiye “Bunun doğru olduğunu nasıl biliyorsun?”, “Bu iddianın doğru olduğunu gerekçelendirir misin?”, “Bunun neden doğru olduğunu açıklar mısın?”, “Bunun doğru olduğundan nasıl emin olabiliyorsun?” gibi sorular sormalarını ister, kendisi de benzer soruları sorarak ve sınıf tartışmasını yöneterek öğrencilere rehberlik eder. Her bir grup kendi varsayımının doğruluğunu nedenleriyle birlikte açıkladıktan sonra öğretmen, her grubun yaptığı çözümü tüm sınıfın anlayacağı şekilde özetler, ortaya atılan düşünceleri daha açık ve anlaşılır hale getirmek adına sorular sorar, önemli noktaları tekrar eder. Böylece sunulan açıklamaların diğer öğrenciler tarafından değerlendirilmesini sağlar. Öğretmen bu eylemleri her çözümünden sonra tekrar ederek sınıf tartışmalarının sürekliliğine katkıda bulunur. Sınıf tartışmaları esnasında tüm sınıfın soruları alınıp yanıtlanır, her grup kendi argümanını savunur, karşı tarafın argümanını ise çürütmeye çalışır. Modelin son aşaması ise *değerlendirme* aşamasıdır. Bu aşamada öğretmen, grupların oluşturdukları argümanları değerlendirir ve sınıfın ortak ispatına karar verilir. Uygulama sürecinde, açıklanan bu modelin aşamaları takip edilerek öğrencilere her derste, kendini ikna et aşaması için yaklaşık 15dk., arkadaşını ikna et aşaması için yaklaşık 25 dk., rakibini ikna et aşaması için yaklaşık 30dk. ve değerlendirme aşaması için yaklaşık 10 dk. verilmiştir.

Veri Analizi

Öğretim deneyine ilişkin verilerin toplanmasında temel araç öğretim bölümlerine ait gözlem ve video kayıtlar olduğu için toplanan veriler, her bir öğretim bölümünün ardından analiz edilmiş ve analizlerden elde edilen bulgularla hem öğrencilerdeki gelişim ortaya konulmuş hem de bir sonraki öğretimin planlaması yapılmıştır. Öğretim deneyinin analizinde sürekli analiz ve geriye dönük analiz olmak üzere iki önemli analiz düzeyi kullanılmıştır (Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse, 2013). Araştırmanın sürekli analizinde, öğretim süreci devam ederken öğretim oturumlarından elde edilen veriler haftalık olarak analiz edilmiştir. Bu doğrultuda araştırmacılar öğretim deneyi sırasında bir önceki öğretim uygulamasını değerlendirmek, eksikliklerini belirlemek ve böylece bir sonraki öğretim uygulamasını planlamak için her dersin sonunda kaydedilen videoları ve ses kayıtlarını incelemişlerdir. Elde ettikleri sonuçları, alan notlarını, sınıf ortamındaki gözlemlerini, test edilen varsayımlarını ayrıntılı olarak tartışmışlar, gerekli gördükleri düzenlemeleri gerçekleştirmişlerdir. Bu doğrultuda bir sonraki ders için yeni varsayımlar oluşturarak kararlar almışlardır. Yapılan bu sürekli analiz ile bir öğretim oturumu önceki oturumdan elde edilen tahminlerin kontrolünü içermiş, böylece öğretim deneyinin yapısı gereği araştırma, katılımcıların öğrenmelerine göre değişebilir ve yenilenebilir statik olmayan bir yapı kazanmıştır (Steffe ve Thomson, 2000). Geriye dönük analizde ise toplanan tüm veriler bütüncül bir bakış açısıyla analiz edilmiştir. Araştırmada ortaya çıkan sosyal ve sosyo-matematiksel normlar bu araştırmanın teorik çerçevesine uygun olacak şekilde matematik eğitimi literatüründe kullanılan açıklamaları temel alınarak tanımlanmış, birbirine çok yakın olan normlar tek bir tema altında birleştirilmiştir. Analizi kolaylaştırabilmek ve normlar ile işlevler arasındaki ilişkiyi açıkça ortaya koyabilmek için Çakır'ın (2021) çalışmasından esinlenerek; “Tartışma”, “Problem Çözme”, “Gerekçeleştirme” ve “İşbirliği” olmak üzere dört norm teması oluşturulmuş ve her norm için bir etiket (SN: Sosyal Norm, SMN: Sosyo-matematiksel Norm) kullanılmıştır. Bu temaların altındaki normlar ise “Sınıf topluluğunun fikirlerini paylaşması beklenir. (SN1)”, Problemlere farklı çözümler sunulması beklenir. (SN2)”, “Düşüncelerin açıklanması ve gerekçelendirilmesi beklenir. (SN3)”, “İşbirliği yaparak beraber çözüm üretilmesi beklenir. (SN4)” şeklinde oluşturulmuştur.

Her bir temanın altındaki norm, kendi alt normlarını başlatan temel norm olarak kabul edilmiş ve bu temel norm ile ilişkili olan sosyal ve sosyo-matematiksel alt normlar, temel normun altına yerleştirilmiştir. Örneğin “Sınıf topluluğunun fikirlerini paylaşması beklenir. (SN1)” sosyal normu sınıf tartışmalarını başlatan temel norm olarak alınmıştır. “Öğrencilerin derse eşit katılımını sağlama (SN1a)”, “Tartışmalarda anlaşılmayan noktaları sorma (SN1b)”, “Konuşan kişiyi sözü bitene kadar dinleme (SN1c)”, “Düşüncelerini grup üyeleri ve sınıf ile paylaşma (SN1d)”, “Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş sunma (SN1e)”, “Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme (SMN1e)” normları ise bu temel norm ile ilişkili olan alt normlar olarak belirlenmiştir. Normlar analizi kolaylaştırmak ve bulguları bütüncül bir bakış açısıyla sunmak için farklı temalar altında sunulmuş olsa

da temel normlar birbirleri ile alt normlar da diğer alt normlarla ilişkili durumdadır. Kodlama yapılırken aynı temel norma bağlı ve birbirinin gelişimini destekleyen sosyal ve sosyo-matematiksel normlar için benzer etiket kullanılmıştır. Örneğin “Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş sunma” sosyal normu “SN1e” kodu ile etiketlenirken bu normun gelişimini desteklediği “Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme” sosyo-matematiksel normu “SMN1e” ile etiketlenmiştir. Araştırmanın bulgularında belirli bir temadaki normları yansıtmaları için sunulan örnek diyaloglarda sadece işlenen temanın normlarına yer verilmiştir. Araştırmada literatürde yer almayan bir norm ortaya çıkmamıştır. Öğretim uygulamalarında belirlenen normlar Tablo 2’de sunulmuştur:

Tablo 2. Öğretim Uygulamalarında Belirlenen Normlar

Tema	Normlar	Alt Normlar
Tartışma	Sınıf topluluğunun fikirlerini paylaşması beklenir (SN1)	Öğrencilerin derse eşit katılımını sağlama (SN1a) Tartışmalarda anlaşılmayan noktaları sorma (SN1b) Konuşan kişiyi sözü bitene kadar dinleme (SN1c) Düşüncelerini grup üyeleri ve sınıf ile paylaşma (SN1d) Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş sunma (SN1e) Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme (SMN1e)
Problem Çözme	Problemlere farklı çözümler sunulması beklenir (SN2)	Problemlere farklı gerekçelendirmeler yapma (SMN2a) Çözümlerini daha genelleştirilebilir hale getirmek için cebirsel çözüm yolları kullanma (SMN2b)
Gerekçelendirme	Düşüncelerin açıklanması ve gerekçelendirilmesi beklenir (SN3)	Kabul edilebilir matematiksel açıklamalar ve gerekçeler sunma (SMN3a) Geçerli bir matematiksel ispat sunma (SMN3b) Deneysel doğrulamayı geçerli ispat olarak kabul etmeme (SMN3c) Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma (SN3d)
İş birliği	İş birliği yaparak beraber çözüm üretilmesi beklenir (SN4)	Ortak sonuca ulaşma (SN4a) Sınıfın (grubun) ortak ispatını oluşturma (SMN4a)

Ayrıca öğretim uygulamalarında ispat işlevlerini analiz etmek için Bartlo’nun (2013) ispat işlevleri çerçevesi temel alınarak, işlevler, alt işlevler alt işlev göstergeleri oluşturulmuştur. İşlevler ve alt işlevler etiketlenirken işlevin baş harfinden yararlanılmıştır. Örneğin “Doğrulama” işlevi “D” ile “Doğru olduğuna ikna olma” alt işlevi ise “D1” ile etiketlenmiştir. Bu araştırmada literatürde yer alan ancak araştırmada ortaya çıkmayan iki alt işlev olduğu görülmüştür. “Keşif” işlevinin alt işlevlerinden biri olan “Araştırma” ve Sistematikleştirme işlevinin alt işlevlerinden biri olan “Alternatif sistemlerin ortaya çıkmasını sağlama” alt işlevlerinin bu araştırmada ortaya çıkmamasının nedeninin öğrencilerin bulunduğu sınıf düzeyi ve bu sınıf düzeyine uygun olarak seçilen ispat problemleri olduğu düşünülmektedir. Benzer şekilde bu araştırma ortaokul düzeyinde olduğu için De Villiers’in (1999) ispat işlevlerinden “Zihinsel meydan okuma” işlevine yer verilmemiştir. Bu araştırmada ortaya çıkan işlevler ve alt işlevler Tablo 3’te sunulmuştur.

Tablo 3. Öğretim Uygulamalarında Belirlenen İspat İşlevleri

İşlevler	Alt İşlevler	Alt İşlev Göstergeleri
Doğrulama (D)	Doğru olduğuna ikna olma (D1) Doğruluğunu onaylama (D2)	Öğrencinin yaptığı çözüm sayesinde varsayımının doğru olduğuna ikna olmasını sağlama Bir ifadenin doğru olduğunun sınıf (grup) tarafından onaylanmasını sağlama
Açıklama (A)	Kavrayış sağlama (A1) Sonuçları görme (A2)	Varsayımın neden doğru olduğunun gerekçelendirilmesini sağlama İspat yaparken kullanılan teoremin sonuçlarının görülmesini, ispatta kullanılan kavramlar hakkında bilgi edinilmesini sağlama
İletişim (İ)	Söylem biçimini ortaya çıkarma (İ1) Tartışma ortamı yaratma (İ2)	Öğretmen ile öğrenci ya da öğrenci ile öğrenci arasında iletişim kurulmasını sağlama Tartışmaların yapıldığı bir ortam oluşmasını sağlama
Keşif (K)	Analiz (K1)	Yapılan bir ispatın analiz edilmesiyle birlikte daha genel sonuçların keşfedilmesini sağlama
Sistematikleştirme (S)	Tutarsızlıkları ortaya çıkarma (S1) İlişkileri ortaya çıkarma (S2) Uygulama (S3)	Aksine örneklerle tutarsızlıkların ortaya çıkarılmasını sağlama İspat yaparken kavramlar arasındaki ilişkilerin kullanılmasını sağlama Çözümleri genelleyerek çözümün benzer bir probleme uygulanmasını sağlama

Norm ve işlevler arasındaki ilişkileri göstermek için hazırlanan tablolarda 12 haftalık öğretim deneyinde sınıf içi diyaloglardaki kodlamalarda bir norm ve bir işlevin birlikte kodlanma sıklığı dikkate alınmıştır. Örneğin yapılan kodlamalarda SMN3a normu ile A1 işlevi birlikte kodlanmıştır. Ancak bazı norm ve işlevler birlikte ya hiç kodlanmamış ya da çok az kodlanmıştır. Bununla birlikte norm ve işlevlerin birlikte kodlandığı haftalar tablolarda üst indis olarak gösterilmiştir. Örneğin ispatın A2 işlevi ile SN1a sosyal normunun birlikte kodlandığı haftalar $\sqrt{3,5,8,10,11,12}$ şeklinde belirtilmiştir

Geçerlik ve Güvenirlik

Bu araştırmanın her aşamasında nitel çalışmalarda geçerlik ve güvenirliliğin sağlanması için çeşitli araştırmacılar tarafından belirlenmiş olan (Creswell, 2013; Merriam, 2018; Miles ve Huberman, 1994; Yıldırım ve Şimşek, 2006) kriterler dikkate alınmıştır. Araştırmada birden fazla veri toplama yöntemi kullanılmış, katılımcılarla uzun süreli etkileşim kurulmuş, veri toplamada, veri analizinde, bulgu, tartışma ve sonuç yazımında uzman incelemesi yapılmış, bulgularda doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Araştırma öncesinde pilot çalışma yapılmış, pilot çalışma sonuçlarına dayalı olarak sınıf içi etkinlikler düzenlenmiştir. Araştırmada gerçekleştirilen tüm öğretim etkinlikleri araştırmacılar tarafından ayrı ayrı kodlanmış ve kodlayıcılar arası güvenirlilik katsayısı (Miles ve Huberman, 1994) %89 olarak hesaplanmıştır. Ardından bağımsız olarak yapılan kodlamalarda benzerlik ve farklılıklar karşılaştırılarak nedenleri üzerine tartışılmıştır. Kodlamaların düzenlenmiş hali farklı bir alan uzmanına sunulmuş, onun görüşleri doğrultusunda düzenlemeler yapılarak kodlamalara son hali verilmiştir.

Bulgular

Çalışmanın bu bölümünde tüm öğretim deneyi boyunca sınıf içinde gözlemlenen normlara ve işlevlere işaret eden örnek diyaloglar ile normlar ve işlevler arasındaki bağlantılar sunulmuştur.

Öğretim Uygulamalarında Ortaya Çıkan Normlar ve İşlevler

KARİDE modeline göre oluşturulan öğrenme ortamında öğretim deneyi boyunca araştırmacı-öğretmenin sınıf içi normların başlatılmasında etkin rol oynadığı, normlara rehberlik ettiği, öğrencilerin de bu normların gelişmesine katkıda bulundukları görülmüştür. Araştırmacı-öğretmenin ilk haftalarda öğrencilere normları daha sık hatırlattığı, normlara bağlı kalmalarını istediği, sonraki haftalarda ise hatırlatmasına gerek kalmadan normların devamlılığının öğrenciler tarafından sağlandığı görülmüştür. Normların birbirleriyle ve işlevlerle ilişkisini görünür kılmak için veri analizi çerçevesi doğrultusunda normlar; “Tartışma”, “Problem çözme”, “Gerekçelendirme” ve “İşbirliği” olmak üzere dört tema altında yorumlanmıştır.

Tartışma Temasındaki Normlar ve Bu Normların İspat İşlevleri ile Bağlantısı

Tartışma teması altında incelenen normlar ve bu normların gelişimini desteklediği işlevler Tablo 4’te sunulmuştur:

Tablo 4. “Tartışma” Temasındaki Normlar ve Bu Normların İşlevler ile Bağlantısı

		TARTIŞMA TEMASINDAKİ NORMLAR					
		Sınıf topluluğunun fikirlerini paylaşması beklenir (SN1)					
İSPAT İŞLEVLERİ		SN1a	SN1b	SN1c	SN1d	SN1e	SMN1e
Doğrulama (D)	D1	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
	D2	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
Açıklama (A)	A1	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
	A2	✓3,5,8,10,11,12					
İletişim (İ)	İ1	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
	İ2	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
Keşif (K)	K1			✓10	✓10		
Sistematikleştirme (S)	S1	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
	S2			✓3,5,8,10,11		✓3,5,8,10,11	✓3,5,8,10,11
	S3			✓4,5,7,8,10,12			

Tablo 4’te görüldüğü gibi bu temadaki “Sınıf topluluğunun fikirlerini paylaşması beklenir (SN1)” normu sınıf tartışmalarını başlatan, düzenleyen ve bu temadaki diğer sosyal ve sosyo-matematiksel normları destekleyen temel normdur. Bu temadaki diğer normlar “Öğrencilerin derse eşit katılımını sağlama (SN1a)”, “Tartışmalarda anlaşılmayan noktaları sorma (SN1b)”, “Konuşan kişiyi sözü bitene kadar dinleme (SN1c)”, “Düşüncelerini grup üyeleri ve sınıf ile paylaşma (SN1d)”, “Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş sunma (SN1e)”, “Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme (SMN1e)” olarak belirlenmiştir. Bu temadaki normları yansıtmaları açısından Efsanevi Matematikçiler grubunun 3. hafta doğrudan ispat yapmalarını gerektiren geometri problemindeki (EK1) küçük grup tartışmalarının bir kesiti aşağıda örnek olarak sunulmuştur.

Öğretmen: Şimdi arkadaşını ikna et aşaması başladı. Her biriniz bireysel çalışmada yaptığınız çözümü grup arkadaşlarıyla paylaşın. Lütfen fikirlerinizi nedenleriyle birlikte açıklayın. Anlamadığınız yerleri birbirinize sorun ve birbirinizi yaptığınız çözümün doğru olduğuna ikna edin. Şimdi kendi grubunuzun ortak çözümünü oluşturmaya çalışacaksınız, lütfen arkadaşlarınızın sözü bitene kadar dinleyin, sonra rakibini ikna et aşamasına geçeceğiz. Bu arada

her hafta farklı biz sözcünün tahtaya çıkmasını istiyorum. (SN1,SN1a,SN1b,SN1c,SN1d,D1,D2,A1,İ1,İ2)

...

Öğrenci 1: Ölçtünüz mü siz de, benimki bir acayip çıktı, mesela soruda burası 6 cm demiş ama ölçünce 3 gibi bir şey çıkıyor. (SN1,SN1a,SN1b,SN1c,İ1,İ2)

Öğrenci 2: Ben 3'ten fazla ölçtüm. Sonra ölçmeyi bıraktım. Kendi bildiğimle yaptım D'yi 60° buldum. Herkes söylesin ne yaptığını. (SN1,SN1a,SN1c,SN1d,D1,İ1,İ2)

...

Öğrenci 2: Evet o zaten eşkenar üçgen. Sen nasıl yaptın? (SN1,SN1a,SN1c,SN1d,D1,D2,İ1,İ2)

Öğrenci 3: Ben D açısını 24° buldum. DAC açısını da 36° buldum. (SN1,SN1a,SN1c,SN1d,D1,İ1,İ2)

Öğrenci 2: Nasıl buldun ki öyle? Şimdi bak bu zaten dik üçgen burasını 60° burayı da 30° vermiş hoca, burası doğru açı yani 180°, 180'den 60'ı çıkarırsak 120° kalır, yani senin söylediğin çürüdü. (SN1,SN1a,SN1b,SN1c,SN1d,SN1e,SMN1e,D1,A1,İ1,İ2,S1,S2)

Öğrenci 3: Ben karıştırmışım orayı. (İ1,İ2)

...

Öğrenci 1: Hani hatırlıyor musunuz taban yükseklik bir şey yapıyorduk, eşkenar üçgende burası 6 ise DC de 6 gibi geliyor bana. Yani yükseklik çizince tam orasına geliyordu üçgenin. Şimdi çizdim taban 6 ya, 3 cm-3cm oldu. (SN1,SN1a,SN1c,SN1d,D1,A1,A2,İ1,İ2,S2)

...

Öğrenci 2: Şimdi bakın bir şey gördüm buradaki ikizkenar üçgen o yüzden bu kenarların eşit olması gerekiyor yani 6 oluyor. (SN1,SN1a,SN1c,SN1d,D1,A1,A2,İ1,İ2,S2)

Öğrenci 3: Yani burası ikizkenar üçgen olduğu için mi 6 cm diyoruz? (SN1,SN1a,SN1b,İ1,İ2)

Öğrenci 2: Evet aslında ikizkenarı şöyle buluyorsun burası zaten 30° soruda verilmiş, D açısını da 30° bulduk. İkisi de 30° olduğu için ikizkenar. O yüzden de bu kenarlar eşit. Hatırlıyor musunuz geçen yıl Gözde hoca ikizkenar üçgenin böyle çaprazına oklar çizmişti (eş açılarının gördüğü kenarların eşliği) o kenarlar eşit oluyordu. Burada işte 30'lara oklar çizerek AC 6 cm olduğu için DC de 6 cm olur. İkna olmayan var mı? (SN1,SN1a,SN1c,SN1d,D1,D2,A1,A2,İ1,İ2,S2)

Öğrenci 3: Ha evet ya nasıl göremedim ben çok kolaymış. Şimdi bakın bir daha anlatalım. (D2,İ1,İ2)

...

Yukarıda verilen örnek diyalogda, öğrencilerin grup tartışması boyunca birbirlerini anlamaya çalıştıkları, anlaşılmayan noktaları birbirlerine sordukları ve birbirlerini ikna etmeye çalıştıkları görülmektedir. Ayrıca gruptaki her bir öğrencinin fikirlerini paylaşarak tartışmaya katılması gerektiğinin farkında olduğu, konuşan kişinin sözü bitene kadar dinlendiği görülmekte ve bu durumlar tartışma temasındaki normlar üzerinde grubun ortak bir anlaşmaya vardığını göstermektedir (SN1,SN1a,SN1b,SN1c,SN1d). Tartışmada bir öğrencinin D açısının ölçüsünü 24° ve DAC açısının ölçüsünü 36° olarak belirlemesi üzerine grup arkadaşının kendi görüşünü savunarak karşıt görüş sunduğu, arkadaşının varsayımını çürüttüğü görülmüştür (SN1e,SMN1e). Bu diyalog aynı zamanda ispatın sistematikleştirme işlevinin tutarsızlıkları ve ilişkileri ortaya çıkarma (S1,S2) alt işlevi ile ilişkilidir. Öğrencilerin yaptıkları ispat sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan D açısının ölçüsünün 30° olduğuna ve DC doğru parçasının uzunluğunun 6 cm olduğuna ikna oldukları

görülmektedir (D1,D2). Bununla birlikte bir öğrencinin ADC üçgeninin ikizkenar üçgen olduğu varsayımında bulunduktan sonra bu varsayımının doğruluğunu nedenleriyle birlikte arkadaşlarına açıkladığı da görülmektedir (A1). Ayrıca öğrencilerin üçgenler ile ilgili bildikleri özellikleri, teoremleri ispatlarında kullandıkları ve bunların sonuçlarını fark ettikleri de görülmektedir (A2). Görüldüğü gibi öğrencilerin yaptıkları çözüm sayesinde varsayımlarının doğruluğuna ikna olmaları ve bu çözümün onaylanabilmesi için varsayımlarının neden doğru olduğunu da gerekçelendirilmesi gerekmektedir. Bu durum ispatın doğrulama işlevi ile açıklama işlevlerinin birbirini desteklediğinin göstergesidir.

Bununla birlikte öğretim deneyi boyunca sınıftaki öğrencilerin fikirlerini paylaşmaları (SN1) gerektiği üzerinde ortak anlaşmaya varmış olmaları öğrencilerin söylem biçimini ortaya çıkarmakta, tartışma ortamı oluşmasını (İ1,İ2) sağlamakta ve tartışma temasındaki normlar ile ispatın iletişim işlevi arasındaki bağlantıya dikkat çekmektedir. Ayrıca öğretim deneyi boyunca, öğrencilerin ispatın doğruluğuna ikna olmaları ve doğruluğunun onaylanabilmesi (D) için neden doğru olduğunun gerekçelendirilmesi (A) gerektiği görülmektedir. Bu işlevlerin ortaya çıkabilmesi de öğrencilerin fikirlerini birbirleri ile paylaşmalarına, birbirlerini ikna etmelerine bağlıdır. Bu durum ve tartışma temasındaki normlar ile ispatın doğrulama, açıklama ve iletişim işlevi arasındaki bağlantıya dikkat çekmektedir. 12 haftalık öğretim deneyinin bulguları, tartışma temasındaki normlar ile ispat işlevlerinin diyaloglarda iç içe geçtiğini, birbirleri ile bağlantılı olduklarını göstermektedir.

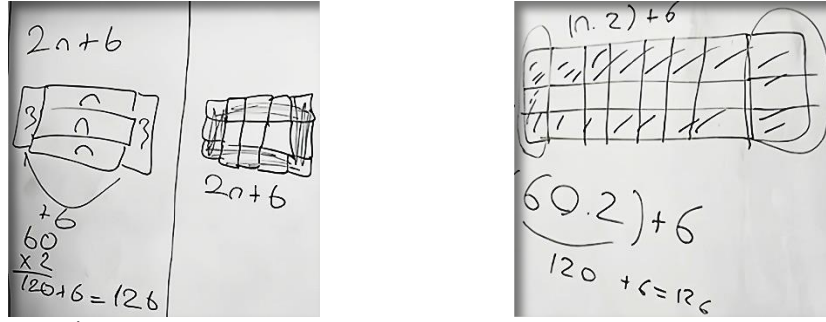
Problem Çözme Temasındaki Normlar ve Bu Normların İspat İşlevleri ile Bağlantısı

Problem çözme teması altında incelenen normlar ve bu normların gelişimini desteklediği işlevler Tablo 5'te sunulmuştur:

Tablo 5. “Problem Çözme” Temasındaki Normlar ve Bu Normların İşlevler ile Bağlantısı

		PROBLEM ÇÖZME TEMASINDAKİ NORMLAR	
		Problemlere farklı çözümler sunulması beklenir (SN2)	
İSPAT İŞLEVLERİ		SMN2a	SMN2b
Doğrulama (D)	D1	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
	D2	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
Açıklama (A)	A1	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
	A2	✓3,5,8,10,11,12	
İletişim (İ)	İ1	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
	İ2	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
Keşif (K)	K1	✓10	
Sistematikleştirme (S)	S1		
	S2	✓3,5,8,10,11	✓3,5,8,10,11
	S3	✓4,5,7,8,10,12	

Tablo 5'te sunulduğu gibi bu temadaki “Problemlere farklı çözümler sunulması beklenir (SN2)” normu, “Problemlere farklı gerekçelendirmeler yapma (SMN2a)” ile “Çözümlerini daha genelleştirilebilir hale getirmek için cebirsel çözüm yolları kullanma (SMN2b)” sosyo-matematiksel normlarını başlatan ve destekleyen norm olduğu için bu temadaki temel norm olarak ele alınmıştır. Araştırmacı-öğretmen ispat etkinliklerinin ilk haftalarında öğrencilerin farklı çözüm yollarının olabileceğini görmeleri için sınıfta farklı temsillerin kullanılmasına, ispat yaparken sonucun doğruluğunun çeşitli gerekçelerle ve şekillerde gösterilebilmesine olanak sağlamıştır. Öğretmenin problemlere farklı çözümler yapma beklentisine karşılık, öğrencilerin de bu beklentinin farkında olarak öğretmen tarafından talep edilmese bile problemlere farklı gerekçelendirmeler sunma girişiminde bulunmaları, birbirlerini cebirsel çözüm yolu kullanmaya teşvik etmeleri problem çözme temasındaki normlar üzerinde grubun ortak bir anlaşmaya vardığını göstermektedir (SN2,SMN2a,SMN2b). Bu temadaki normları yansıtan sınıf içi diyaloga örnek olması açısından Efsanevi Matematikçiler grubunun 12. hafta örüntü problemindeki (EK1) küçük grup tartışmalarının bir kesiti ve öğrencilerin yaptıkları çözümler aşağıda sunulmuştur:



Görsel 1. On İkinci Hafta Efsanevi Matematikçiler Grubunun Küçük Grup Tartışması

Öğrenci 1: Ben şöyle yaptım şu kenarlardaki 3'er taneyi ayırdım. Beyaz karoların üstünde ve altında beyaz karo kadar gri var dedim. Bu yüzden ilk başta $2 \cdot x$ yaptım sonra bunların yanlarını kaplamak için 3'er tane daha gerektiği için $+6$ yaptım. (D1,D2,A1,İ1,İ2)

Öğrenci 2: Benimki de seninkiyle aynı formülümüz. Burası n kadar olacak yani altta ve üstte n kadar olacak yanlarda da 3 ve 3 daha 6 yani $2x+6$ ya da işte $2n+6$. 60 olunca da zaten 126 çıkıyor. (D1,D2,A1,İ1,İ2)

...

Öğrenci 1: Ama bak biz $+6$ ekliyoruz ya Nefise'nin yaptığı çok garip duruyor.

Öğrenci 3: Bence sizinki de doğru ama benim ki de doğru. Ama neden öyle biliyor musun şimdi bak kaç tane beyaz varsa onun iki fazlasını alıyoruz bunlar altta ve üstteki griler oluyor. Sonra kalan 2'yi ekliyoruz. (SN2,SMN2a,D1,D2,A1,İ1,İ2)

Öğrenci 4: Bence burada doğru iki bakış açısı var biz bu kenarları çıkarıp bakmışız sen altı ve üstün tamamını alıp bakmışsın. (SN2,SMN2a,D1,D2,A1,İ1,İ2)

Öğrenci 3: Evet siz öyle bölmüşsünüz parçalara, ben böyle bölmüşüm. Siz 6 karoyu direkt çıkararak bakmışsınız. (SN2,SMN2a,D1,D2,A1,İ1,İ2)

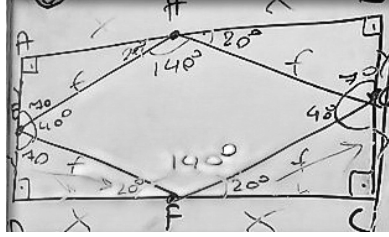
Öğrenci 2: Aslında şimdi fark ettim Nefise'ninkiyle bizimki aynı ikisi de doğru. Çünkü o $(n+2) \cdot 2$ yapmış ya burada 2 her ikisiyle de çarpılacak $2n+4$ olacak sonra da 2 ekleyecek. Yani $2n+6$ olacak. Yani ikisi de doğru. (SN2,SMN2a,D1,D2,A1,İ1,İ2)

...

Tartışmada öğrencilerin, şekli çeşitli şekillerde analiz ederek farklı genelleme yolları keşfettikleri görülmektedir. Tartışmanın ilk bölümünde bu öğrenciler arasında anlaşmazlık olsa da şekli farklı şekillerde analiz ettiklerinde genel kuralın birbirine eşit olduğunu gördükleri belirlenmiştir. Tartışmada görüldüğü gibi, öğrencilerin farklı çözüm arayışlarına girmeleri, çözümlerinde kullandıkları yöntemlerin birbirlerinden nasıl farklılaştığına dair gerekçeler sunmaları bu normun (SN2,SMN2a) sınıf topluluğu tarafından kabul edildiğinin göstergesidir. Aynı zamanda öğrencilerin eylemlerinde bu normların ortaya çıkması, öğrencilerin çözümlerinin birbirlerinden nasıl farklılaştığına dair gerekçe sunarak grup arkadaşlarını kendi varsayımlarının doğruluğuna ikna etmeye çalışmaları ispatın doğrulama, açıklama ve iletişim işlevlerine işaret etmektedir (D1,D2,A1,İ1,İ2).

Ayrıca bu temadaki "Problemlere farklı çözümler sunulması beklenir (SN2)" sosyal normu "Çözümlerini daha genelleştirilebilir hale getirmek için cebirsel çözüm yolları kullanma (SMN2b)" sosyo-matematiksel normunu başlatmakta ve gelişimini desteklenmektedir. Aşağıda bu normu yansıtan Efsanevi Matematikçiler grubunun öğretim deneyinin 10. haftasında doğrudan ispat yapmaları gereken geometri problemindeki (EK1) küçük grup tartışması ve Görsel 2'de yaptıkları çözümleri görülmektedir. Bu tartışmada grup arkadaşı Öğrenci 2'ye örnekle ispat yaptığını söyleyince öğrencinin bu sayıları sadece açıların ölçülerinin eşit olduğunu göstermek için kullandığını, hangi açıyı yazarsa yazsın aynı sonuca ulaşacaklarını söylemesi öğrencinin genelleşici örnek kullandığının

göstergesidir. Bununla birlikte kenar uzunluklarının eşitliğini göstermek için yine sayısal değer kullanan öğrenciye arkadaşları karşıt görüş sunmalarına karşın öğrencinin çözümlerini daha genelleştirilebilir hale getirmek için cebirsel çözüm yolları kullandığı ve arkadaşlarını ikna ettiği görülmektedir (SMN2b,D1,D2,A1,A2,İ1,İ2,S1,S2).



Görsel 2. Onuncu Hafta Efsanevi Matematikçiler Grubunun Küçük Grup Tartışması

...

Öğrenci 2: Ya tabi ki olur istediğin sayıyı yaz. Ben hangi açı hangi açıya eşit görün diye öyle gösterdim. Toplamları 90 olan istediğin sayıyı al. Mesela bu parçalardan birine 5 desek zaten soruda verilmiş bunlar eşit burası da 5 olacak. Bu bir dikdörtgen olduğu için karşısı da 5 ve 5 olacak. Yani burası x ise burası da x . Bu kenar y ise bu kenar da y . Zaten soruda verilmiş. Bence içerdeki dörtgenin bu kenarı f ise bu da f . (SN2,SMN2a,SMN2b,D1,A1,A2,İ1,İ2,S2)

...

Öğrenci 1: Bu deneme yöntemi sayılmaz mı?

Öğrenci 2: Hayır sayılmaz, biz hangi açılar eşit onu göstermek için sayı kullandık sadece...

Öğrenci 4: Ama yine sayı verdin.

Öğrenci 2: Hayır size eşkenar dörtgen olduğunu göstermek için...çünkü üçgenlerde bu kenarların hepsi aynı bak senin için sayı vermeyeceğim. Şimdi bunların hepsi y , bunların hepsi x . Çünkü bu bir dikdörtgen. Bu üçgenlerin hepsi eşit üçgenler. Çünkü burası 20 ise burası da 20, burası da 140 kalır karşısı da aynı olur. Buralar da 70 olur. O yüzden bu üçgenlerin kalan kenarlarının da eşit olması gerekir. Açıları da yazdık işte. Bu eşkenar dörtgen oldu. (SMN2a,SMN2b,D1,A1,A2,İ1,İ2,S1,S2)

Öğrenci 1: Tamam ikna oldum.(D2)

...

Yukarıdaki diyalogda öğrencilerin dikdörtgenin köşelerinde oluşan üçgenlerin eşliği yardımıyla EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu ispatladıkları, yaptıkları ispat ile herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan varsayımlarının doğru olduğuna ikna oldukları, grubunun ispatı onayladığı ve öğrencilerin varsayımlarının doğruluğunu nedenleriyle birlikte açıkladıkları görülmektedir (D1,D2,A1,A2,İ1,İ2,S2). Ayrıca aynı hafta Turuncgiller grubu Görsel 3'te sunulduğu gibi farklı bir çözüm yöntemi ile dikdörtgenin simetri ekseninden yararlanarak üçgenlerin eşliğini göstermişler ve bu çözüm de sınıf tarafından onaylanmıştır:



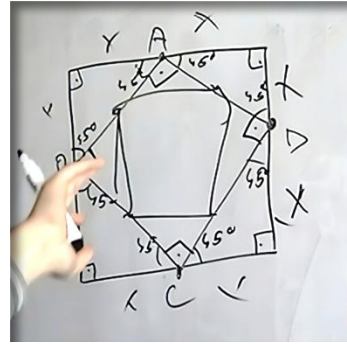
Görsel 3. Onuncu Hafta Turuncgiller Grubunun Sınıf Tartışması

Öğrencilerin dik üçgen tanımı, dikdörtgen tanımı, doğru açı tanımı, eşkenar dörtgenin özellikleri, simetri eksenini gibi önceden öğrendikleri birçok kavramı ilişkilendirerek bu ispatta kullandıkları görülmektedir (S2). Öğrencilerin ispat etkinliklerinde matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğuna dair kavrayış sağlamaları ve ispat yaparken kullandıkları özelliklerin sonuçlarını görmeleri ile bu özellikler hakkında daha fazla bilgi sahibi olmaları sağlanmıştır (A1,A2).

10. hafta değerlendirme aşamasında öğretmen “Şimdi bu anlaşıldıysa bir soru daha soruyorum. Bir karenin kenarlarının orta noktalarını birleştirdiğimizde oluşan dörtgen hakkında ne söyleyebilirsiniz?” şeklinde bir soru yönelmesi üzerine pek çok öğrenci farklı gerekçelendirmeler yapmışlar, bir öğrenci Görsel 4-a’da sunulduğu gibi köşelerde oluşan üçgenlerin ikizkenar olduğunu göstererek oluşan dörtgenin kare olduğunu ispatlamıştır. Bu problemde öğrencilerin kendi buldukları çözüm yöntemini genelleyerek karşılaştıkları farklı problemde kullanmaları sistematikleştirme işlevinin *Uygulama (S3)* alt işlevine hizmet etmiştir:



a



b

Görsel 4. Onuncu Hafta Değerlendirme Aşaması

Öğretmenin problemi genişletmesinin ardından bir öğrencinin Görsel 4-b’de sunulduğu gibi oluşan bu karenin kenarlarının orta noktaları birleştiğinde ortada oluşan dörtgenin de kare olacağı genellemesini yaptığı görülmüştür. Öğretmenin sınıfa söz vermesi üzerine farklı gerekçelendirmeler yapılmıştır. Diyalog aşağıda sunulmuştur:

Öğrenci 1: Hocam ben size bir şey soracağım bunun da kenarlarının orta noktalarını da birleştireydik bu da bir kare olur muydu? (K1)

Öğretmen: Evet ne dersiniz bu da bir kare olur muydu diyor?

Öğrenci 2: Kare olur. Çünkü bir önceki de karenin içinden çıkan bir kare olduğuna göre bu da bir kare olur. (SN2,SMN2a,D1,D2,A1,A2,İ1,İ2,K1,S2)

Öğrenci 3: Kare olur çünkü kenarlardaki üçgenler yine ikizkenar olacak. (SN2,SMN2a,D1,D2,A1,A2,İ1,İ2,K1,S2)

Öğretmen: Bu böyle sonsuza kadar gider değil mi? Bunun içine de çizsek yine kenarların orta noktalarını birleştirecek bu da bir kare olur.

İspatın analiz edilmesi, daha genel sonuçların keşfedilmesi sağlamış ve keşif işlevinin *Analiz (K1)* alt işlevine hizmet etmiştir. Bu sınıfta öğrencilerin problemlere farklı çözümler sunulması normu, öğrencilerin çözümlerini genelleyerek benzer bir probleme uygulamalarını (S3) ve yeni keşifler yapmalarını (K1) teşvik ederek zengin bir tartışma ortamı oluşmasını sağlamıştır.

Öğretim deneyi boyunca öğrencilerin problemlere farklı gerekçelendirmeler yapmaları (SMN2a) varsayımlarının neden doğru olduğunu gerekçelendirmelerini de (A) gerekli kıldığı için ispatın açıklama işlevini, aynı zamanda bu sınıfın varsayımlarının doğru olduğuna ikna olmalarını (D) sağladığı için ispatın doğrulama işlevini desteklemiştir. Ayrıca öğrencilerin çözümlerini sunarken farklı gerekçelendirmeler yapmak için farklı matematiksel kavramlar arasında ilişki kurmaları (S2) sistematikleştirme işlevini desteklemiştir. Bu işlevlerin ortaya çıkabilmesi de öğrencilerin fikirlerini birbirleri ile paylaşımlarına, iletişim kurmalarına (İ) bağlıdır.

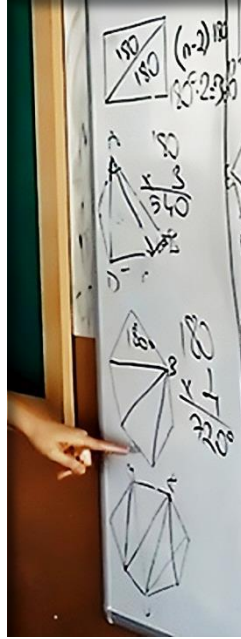
Gerekçelendirme Temasındaki Normlar ve Bu Normların İspat İşlevleri ile Bağlantısı

Gerekçelendirme teması altında incelenen normlar ve bu normların gelişimini desteklediği işlevler Tablo 6'da sunulmuştur:

Tablo 6. “Gerekçelendirme” Temasındaki Normlar ve Bu Normların İşlevler ile Bağlantısı

GEREKÇELENĐİRME TEMASINDAKİ NORMLAR					
Düşüncelerin açıklanması ve gerekçelendirilmesi beklenir (SN3)					
İSPAT İŞLEVLERİ		SMN3a	SMN3b	SMN3c	SN3d
Doğrulama (D)	D1	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
	D2	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
Açıklama (A)	A1	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
	A2	✓3,5,8,10,11,12	✓3,5,8,10,11,12		
İletişim (İ)	İ1	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
	İ2	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
Keşif (K)	K1	✓10	✓10		
Sistematikleştirme (S)	S1	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
	S2	✓3,5,8,10,11	✓3,5,8,10,11		
	S3	✓4,5,7,8,10,12	✓4,5,7,8,10,12		

Tablo 6'da verildiği gibi bu temadaki “Düşüncelerin açıklanması ve gerekçelendirilmesi beklenir (SN3)” normu, “Kabul edilebilir matematiksel açıklamalar ve gerekçeler sunma (SMN3a)”, “Geçerli bir matematiksel ispat sunma (SMN3b)”, “Deneyisel doğrulamayı geçerli ispat olarak kabul etmeme (SMN3c)”, “Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma (SN3d)” sosyal ve sosyo-matematiksel normlarını başlatan ve destekleyen norm olduğu için bu temadaki temel norm olarak ele alınmıştır. Bu temadaki normları yansıtmaya amacıyla Starlar grubunun 5. hafta doğrudan ispat yapmaları gereken geometri problemindeki (EK1) sınıf tartışması aşağıda sunulmuştur. Grubun çokgenleri Görsel 5'te sunulduğu gibi doğru bir şekilde üçgenlere parçaladıkları ve üçgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamı yardımıyla çokgenlerin iç açılarının ölçülerini buldukları tespit edilmiştir. Starlar grubunun sınıf tartışmalarının bir kesiti aşağıda sunulmuştur:



Görsel 5. Beşinci Hafta Starlar Grubunun Sınıf Tartışması

Grup sözcüsü: Hocam biz bu dikdörtgeni üçgenlere böldük, iki üçgen çıktı, üçgenin açılarının toplamı 180° 'dir. 180° 'le 180° 'i topladık 360 çıktı. Yani hocam diğerlerini de yapınca şöyle bir şey keşfettik kaç köşesi varsa onun iki eksiğiyle 180° 'i çarpınca iç açılarının toplamı çıkıyor. Otuzgenin 30 köşesi var iki eksiği 28 ile 180° 'i çarptık. n kenarlı olunca da $(n-2).180$ oldu. (SN3,SMN3a,SMN3b,D1,D2,A1,A2,İ1,İ2,S2)

Öğretmen: Neden üçgenlere böldünüz yani nereden geldi aklınıza?

Grup sözcüsü: Çünkü üçgenin açılarının 180 olduğunu biliyorduk. Aslında önce ben mesela beşgeni bir üçgene sonra bir dörtgene ayırmıştım. Üçgenin 180 , dörtgenin 360 toplayınca 540 olmuştu. Ama sonra şöyle düşündüm mesela ongen olsa bir üçgen ve bir dokuzgen olsa ben dokuzgenin açılarını bilmiyorum. O yüzden hepsini üçgene ayırdım. (SN3,SMN3a,SMN3b,D1,D2,A1,A2,İ1,İ2,S2)

...

Öğrenci 2: Peki $(n-2).180$ 'in bütün çokgenler için doğru olduğundan nasıl emin olabiliyorsunuz?

Grup sözcüsü: Şimdi zaten bütün çokgenlerde kenar sayısının 2 eksiği kadar üçgen oluşur. Bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 olduğu için de sonucu 180 ile çarpıyoruz. (SN3,SMN3a,SMN3b,D1,D2,A1,A2,İ1,İ2,S2)

Bu tartışmada öğretmenin sözcüye neden üçgenlere böldüklerini sorması ve Öğrenci 2'nin yaptıkları genellemenin bütün çokgenler için neden doğru olduğuna dair gerekçe istemesi üzerine sözcünün açıklama ve gerekçelendirmelerini matematiksel temellere dayandığı görülmüştür (SN3,SMN3a). Öğrencilerin gerekçelendirme yapımları beklentisinin farkında olarak, çözümlere ve çözümlerinde kullandıkları kavramlara yönelik kabul edilebilir matematiksel açıklamaları ispatın açıklama (A) işlevini desteklemektedir. Aynı zamanda öğrencilerin gerekçelendirme yaparken farklı çokgenlerin özellikleri arasında ilişkiler kurmaları ispatın sistematikleştirme işlevinin ilişkileri ortaya çıkarma alt işlevini (S2) desteklemektedir. Hem grubun hem de sınıfın yapılan bu ispat sayesinde bir çokgenin iç açıları ölçüleri toplamının $(n-2).180$ olduğunu doğruladığı görülmektedir (D1,D2). Bununla birlikte bu sınıfta geçerli matematiksel ispat sunmanın gerekli olduğu, deneysel doğrulamanın geçerli ispat olarak kabul görmediği, öğrencilerin karşıt görüş oluşturarak kendi görüşlerini savundukları

küçük grup ve sınıf tartışmalarında yerleşmiş normlar olarak ortaya çıkmaktadır (SMN3a,SMN3b,SMN3c,SN3d). Örneğin Turunçgiller grubundan bir öğrencinin aynı problem için çokgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamları arasında kat ilişkisi bulmaya çalıştığı ancak öğrencinin bu sayısal yaklaşımının grup arkadaşları tarafından kabul edilmediği gözlemlenmiştir. Öğrencinin grup tartışmasındaki çözümü şu şekildedir:

...

Öğrenci 1: Bakın ben bir şey buldum. Bence tahtada bunu da sunalım. Şimdi siz bulduğunuz formülle dörtgeni 360, beşgeni 540, altıgeni 720, yedigeni de 900 buldunuz ya. Hepsinde zaten 180 ekliyorsun. Bunları alt alta yazdım sırayla. Şimdi dörtgen de 90'nın 4 katı oldu, beşgende 90'nın 6 katı, altıgende 90'nın 8 katı oldu. Yani hep 2 kat 2 kat artıyor.

Öğrenci 2: Biz zaten genel bir şey bulduk. Sen yine örnekle yapıyorsun. (SMN3c,SN3d)

...

Aynı grupta bir öğrencinin açıölçer kullanarak dörtgenin iç açılarını ölçtüğünü ve açıların her birinin ölçüsünü 90° bulduğunu, diğer çokgenleri de aynı şekilde bulabileceklerini söylemesi, bir başka öğrencinin görsel algıya dayalı olarak çokgenlerin iç açılarının ölçülerine değer vermesi de arkadaşları tarafından reddedilmiştir. Bu durum sınıfta bir iddianın doğruluğunun onaylanabilmesi için yapılan ispatın sınıfın sosyal ve sosyo-matematiksel normlarına uygun olması gerektiğini göstermektedir. Nitekim bu sınıfta deneysel doğrulama geçerli bir ispat yöntemi olarak kabul edilmediği için doğruluğu onaylanmamış, karşıt görüşler oluşturulmuştur (SMN3c,SN3d). Düşüncelerin açıklanması ve gerekçelendirilmesi konusunda sınıf topluluğunun ortak bir anlaşılmaya vardığı (SN3) ve bu normun ispatın açıklama işlevinin kavrayış sağlama (A1) alt işlevini ortaya çıkardığı tüm öğretim deneyinde gözlemlenmiştir. Aynı zamanda bir çözümün ya da ifadenin doğru olduğuna ikna olunması ve doğruluğunun onaylanabilmesi (D1,D2) için sunulan açıklamaların kabul edilebilir olması yani gerekçelendirme temasındaki normlarla uyumu gerektirdiği, bu temadaki normların ispatın doğrulama işlevini ortaya çıkardığı görülmektedir. Kabul edilebilir matematiksel açıklamaların ve geçerli ispatın ortaya çıkabilmesi için öğrencilerin birbirlerine yaptıkları gerekçelendirmelerin yanı sıra öğretmenin verdiği dönütler ve değerlendirmeler de etkili olmaktadır (SMN3a,SMN3b). Nitekim bu normların ve işlevlerin ortaya çıkabilmesi öğrencilerin fikirlerini birbirleri ve öğretmenleri ile paylaşmalarına, iletişim kurmalarına (İ) bağlıdır.

İş birliği Temasındaki Normlar ve Bu Normların İspat İşlevleri ile Bağlantısı

İş birliği teması altında incelenen normlar ve bu normların gelişimini desteklediği işlevler Tablo 7'de sunulmuştur:

Tablo 7. “İş birliği” Temasındaki Normlar ve Bu Normların İşlevler ile Bağlantısı

İŞ BİRLİĞİ TEMASINDAKİ NORMLAR			
İş birliği yaparak beraber çözüm üretme (SN4)			
İSPAT İŞLEVLERİ		SN4a	SMN4a
Doğrulama (D)	D1	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
	D2	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
Açıklama (A)	A1	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
	A2	✓3,5,8,10,11,12	✓3,5,8,10,11,12
İletişim (İ)	İ1	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
	İ2	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
Keşif (K)	K1		
Sistematikleştirme (S)	S1	✓Tüm haftalar	✓Tüm haftalar
	S2	✓3,5,8,10,11	✓3,5,8,10,11
	S3		

Tablo 7’de görüldüğü gibi bu temadaki “İş birliği yaparak beraber çözüm üretme (SN4)” normu, “Ortak sonuca ulaşma (SN4a)” ve “Sınıfın (grubun) ortak ispatını oluşturma (SMN4a)” sosyal ve sosyo-matematiksel normlarını başlatan ve destekleyen norm olduğu için bu temada temel norm olarak ele alınmıştır. KARİDE modeli öğrencilerin küçük grup çalışmalarında iş birliği yapmaları, beraber çözüm üretmeleri ve sınıf tartışmalarında da sınıfın ortak ispatının oluşturulması üzerine kurulu bir model olduğu için, diyalogların tamamında iş birliği temasındaki normlar görünür biçimdedir. Öğrencilerin iş birliği yaparak beraber çözüm üretmeleri (SN4) gerektiği konusunda ortak anlayış geliştirmeleri kendi aralarında iletişim kurmalarını ve tartışmaların yapıldığı bir ortam oluşmasını (İ1,İ2) sağlamıştır. Bu durum iş birliği temasındaki normlar ve ispatın iletişim işlevi arasındaki bağlantıyı göstermektedir. Öğretim deneyinin bütün haftalarında bireysel çalışmalarında çözüm yapamayan öğrencilerin, küçük gruplarda diğer arkadaşları ile birlikte çözüm ürettikleri, bütün grup üyelerinin üzerinde görüş birliğine vardığı ortak bir çözüm oluşturmaya çalıştıkları görülmüş (SN4a,SMN4a), küçük grupların ortak sonuca ulaşabilmeleri için tüm üyelerinin varsayımların doğru olduğuna ikna olmaları ve varsayımın doğruluğunun grup tarafından onaylanması gerekmektedir (D1,D2). Bu durum iş birliği temasındaki normların ispatın doğrulama işlevini desteklediğini göstermektedir. Ortak sonuca ulaşılabilmesi noktasında (SN4a) hatalı varsayımlar aksine örneklerle çürütülmüş (S1) deneysel doğrulamalara itiraz edilmiş ve varsayımların doğruluğunun gösterilmesi için öğrencilerin matematiksel açıklamalar yapmaları (A) gerekmiştir. Bu durum iş birliği temasındaki normların ispatın açıklama ve sistematikleştirme işlevini desteklediğini göstermektedir.

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu araştırmada KARİDE modeline göre oluşturulan öğrenme ortamında, sınıf mikrokültüründeki öğrenci ve öğretmen eylemlerinden doğan sosyal ve sosyo-matematiksel normların, ispat işlevlerinin ve ispat işlevleri ile normlar arasındaki ilişkinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Araştırmanın sonuçları, 12 haftalık öğretim deneyinde KARİDE modeline göre oluşturulan ders oturumlarında etkileşim yapısının unsurları olarak tartışma, problem çözme, gerekçelendirme ve iş birliği normlarının sınıf üyelerinin çoğu tarafından benimsenmiş olduğunu ve bu normların tartışmalardaki diyaloglarda belirgin bir şekilde ortaya çıktığını göstermiştir. Bu normların birbirleri ile ilişkili olduğu ve birbirlerinin gelişimini desteklediği sonuçlara yansımıştır. Aynı zamanda araştırmanın sonuçları, KARİDE modeline göre oluşturulan öğrenme ortamının ve bu ortamdaki ispat problemlerinin ispatın aynı anda pek çok amaca hizmet etmesini sağladığına, böylece ispatın farklı işlevlerini ortaya çıkardığına, bu işlevlerin birbirlerinin gelişimini desteklediğine işaret etmektedir. Öğretim uygulamalarında ispatın doğrulama işlevinin “Doğru olduğuna ikna olma” ve “Doğruluğunu onaylama”; açıklama işlevinin “Kavrayış sağlama” ve “Sonuçları görme; iletişim işlevinin “Söylem biçimini ortaya çıkarma” ve “Tartışma ortamı yaratma”; keşif işlevinin “Analiz”; sistematikleştirme işlevinin ise “Tutarsızlıkları ortaya çıkarma”, “İlişkileri ortaya çıkarma” ve “Uygulama” işlevlerinin ortaya çıktığı görülmüştür. Sonuçlar normlar ve işlevler arasındaki ilişki bağlamında ele alındığında normlar ile ispat işlevlerinin diyaloglarda iç içe geçtiğini, tartışma ve iş birliği temasındaki normların özellikle ispatın iletişim işlevini desteklediğini, gerekçelendirme ve problem çözme temasındaki normların ise ispatın doğrulama, açıklama, keşif ve sistematikleştirme işlevini desteklediğini göstermektedir. Sınıfın ya da küçük grupların fikirlerini paylaşmaları, anlaşılmayan yerlerde açıklama beklmeleri, kendi varsayımlarını savunmaları ve karşıt görüş sunmaları konusunda anlaşmaya varmış olmaları öğrenciler arasında iletişim kurulmasına ve tartışmaların yapıldığı sınıf ortamının oluşmasına olanak sağlaması, tartışma temasındaki normlar ile iletişim işlevinin birbirini desteklediğini ortaya koymaktadır. Aynı zamanda tartışma temasındaki normlar ile birlikte küçük grupların beraber çözüm üretmelerine olanak sağlayan iş birliği temasındaki normların da görünür olmasının ispatın iletişim işlevi ile mümkün olduğu görülmüştür. Sınıfın; görüşlerini açıklama ve gerekçelendirme, kabul edilebilir gerekçeler sunma, deneysel doğrulama yapmama, problemlere farklı çözümler sunma, çözümlerinde cebirsel çözüm yollarını kullanma gibi normlarda anlaşmaya varmış olmaları gerekçelendirme ve problem çözme temasındaki normların varlığını göstermiştir. Aynı zamanda bu normlar; öğrencilerin yaptığı ispat ile kendini ve grubunu ikna ederek ispatın doğrulanması, neden

doğru olduğunun açıklanması, daha genel sonuçların keşfedilmesi, tutarsızlıkların ve kavramlar arasındaki ilişkilerin ortaya çıkması işlevleri ile paralel bir ilerleme göstermiştir. Tüm bu durumlar belirtilen normlar ile ispat işlevlerinin birbirlerini desteklediğini göstermektedir. Ancak bu çalışmada, keşif işlevinin “Analiz” ve sistematikleştirme işlevinin “Uygulama” alt işlevlerinin diğer işlevler ile karşılaştırıldığında diyaloglarda daha az ortaya çıktığı görülmüştür. Bu durumun çalışmanın yapıldığı ortaokul düzeyi ve bu düzeye uygun olarak seçilen problemlerden kaynaklı olduğu düşünülmektedir.

Bu araştırma kapsamında ele alınan matematiksel ispatın çerçevesini, Stylianides’in (2007) sosyal olarak inşa edilen ve geçerliliği sınıf normlarına bağlı olan ispat tanımı oluşturmuştur. Öğrenme ve öğretme ortamında sınıf topluluğunun, mikrokültürün oluşmasına hem katkıda bulunduğu hem de bu kültürden etkilendiği bilinmekte ve bir normun rolünü anlamak için diğer normlarla nasıl ilişkili olduğunu analiz etmek gerektiği belirtilmektedir (Lopez ve Allal, 2007). Nitekim mevcut araştırma, her bir normun diğer normlarla nasıl ilişki içinde olduğunu ve sınıf içi diyaloglarda birbirlerini nasıl desteklediklerini göstermektedir. Ayrıca sosyal ve sosyo-matematiksel normların sınıflarda sorgulamaya dayalı işbirlikçi yaklaşımlar ile birlikte uygulandığında öğrencilerin matematiksel tartışmalara aktif bir şekilde katılımını sağlamada ve katkılarının niteliğini arttırmada, bir sınıfın kültürünü anlamada ve bu kültürü istenen şekilde değiştirmede son derece faydalı olduğu vurgulanmaktadır (Partanen ve Kaasila, 2015; Yackel ve Cobb, 1996). KARİDE modeline göre oluşturulan, hem iş birliğinin hem de matematiksel tartışmaların aktif bir şekilde yapıldığı bu sınıfta, özellikle tartışma teması altındaki normların; sınıf içi etkinliklere katılmada ve ispat problemlerini çözmede sürecin niteliğini artırdığı görülmüştür. Bu sınıftaki öğrencilerin fikirlerini paylaşmaları, iş birliği yaparak beraber çözüm üretmeleri, anlaşılmayan yerleri sormaları, karşıt görüş sunmaları ve ortak bir çözüm oluşturmaları konusunda ortak anlaşmaya varmış olmaları, küçük grup ve sınıf tartışmalarına rehberlik etmiş ve düzeni sağlamıştır. Herbst ve diğerleri (2010) iletişim işlevinin, ispatta ulaşılan sonuçların paylaşılmasını, tartışılmasını, doğruluğunun farklı kişilerce kabul edilmesini ya da reddedilmesini kapsadığını belirtmektedir. Dolayısıyla bu araştırmanın sonuçları tartışma teması altındaki normların ispatın iletişim işlevini desteklediğini göstermektedir. Öğrenciler ispat yaparken fikirlerini paylaştıkları için ortaya çıkan söylem biçimleri sayesinde kullandıkları tanımlar, kavramlar ya da gerekçeler diğer öğrenciler tarafından değerlendirilmiştir. Böylece ispatın iletişim işlevinin yarattığı tartışma ortamında farklı gerekçeler arasında ilişkiler kurulmuş, öğrencilerin karşı argümanlara yanıt verirken kendi argümanlarını gözden geçirmeleri, hem kendi argümanlarındaki hem de diğer öğrencilerin argümanlarındaki tutarsızlıkları görme fırsatı elde etmelerini sağlamıştır. İspatın sınıf ortamında argümanların iletilmesini ve öğrencilerin birbirleri ile nasıl iletişim kuracaklarını göstermesi bakımından önemli olduğu farklı araştırmacılar tarafından vurgulanmıştır (Bartlo, 2013; Herbst vd., 2010). Cilli-Turner (2017) tartışmaya dayalı olarak oluşturduğu sınıfta özellikle ispatın iletişim işlevinde anlamlı bir fark olmasını geleneksel eğitimin ispatın iletişim yönünü engellemesine bağlanmıştır. Benzer şekilde Bleiler-Baxter ve Pair (2017) ispatın işlevlerini ortaya çıkaran sınıf içi etkinliklerin hangileri olduğunu araştırdığı çalışmada en çok iletişim işlevi ile tartışma arasında ilişki olduğunu göstermiştir. Nitekim bu sınıfta küçük grup ve sınıf tartışmalarına olanak tanıyan KARİDE modeli ile ispatın sosyal bir süreç olarak ele alınması, bu süreçte öğrencilerin matematiksel dil kullanarak iletişim kurmaları, tartışmalardaki düzenliliği sağlamak ve geçerli kabul edilecek ispat çerçevesinin oluşturulması için normların kullanılması bu araştırmaların sonuçlarını desteklemektedir.

Bazı ispat problemlerinde öğrencilerin farklı çözüm arayışlarına girdikleri, tartışmalar esnasında grup üyelerini ve sınıfı ikna edebilmeleri için çözümlerinde kullandıkları yöntemlerin birbirlerinden nasıl farklılaştığına dair gerekçeler sundukları görülmüştür. Lev ve Leikin (2017), öğrencilerin farklı gerekçelendirmeler yapmalarının ve farklı stratejiler kullanmalarının, onları yeni keşifler yapmaya teşvik edeceğini belirtmektedir. Nitekim bu çalışmada sınıftaki öğrencilerin farklı çözümler sunulması beklentisine karşılık, farklı çözüm arayışlarına girmeleri, farklı gerekçelendirmeler yapmaları, çözümlerini genelleyerek benzer bir probleme uygulamaları ve yeni keşifler yapmaları, ispatın keşif işlevi ile sistematikleştirme işlevinin ortaya çıkmasını sağlamıştır. Benzer şekilde Bartlo (2013) yaptığı çalışmada öğrencilerin bazen yapılan bir ispatın analiz edilmesiyle birlikte daha genel ve daha güçlü sonuçları keşfedebileceklerini belirtmiştir.

Tartışmalarda öğrencilerin “Neden doğru olduğunu açıklar mısın, doğru olduğundan nasıl emin olabiliyorsun?” gibi sorular sormaları, öğretmenin de “Bu çözüm sizi ikna etti mi?” diye sorup sınıf tartışmasını başlatması hem küçük grup hem de sınıf tartışmalarında öğrencilerin arkadaşlarını ikna etmeye çalışırken düşüncelerini açıklamaları ve gerekçelendirmeleri konusunda ortak anlaşmaya vardığını göstermektedir. Bu noktada gerekçelendirme temasındaki normlar ile ispatın açıklama ve doğrulama işlevinin birbirini desteklediği görülmektedir. Öğrencilerin yaptıkları açıklamaların grup üyelerini ya da sınıfı ikna edebilmesi için kabul edilebilir matematiksel gerekçeler ya da geçerli bir matematiksel ispat olması gerekmiştir. Bu şekilde öğrencilerin başkaları tarafından kendilerine sunulan matematiksel açıklamaları sorgulamadan kabul etmeleri ve ezberlemeleri yerine ispat sayesinde kendi oluşturdukları matematiksel fikirlerin doğruluğuna ikna olmalarının öğrencilerin özerk öğrenenler olmalarına yardımcı olacağı farklı araştırmacılar tarafından da belirtilmiştir (Bartlo, 2013; Dreyfus, 1999; Herbst vd., 2010). Bu araştırmanın sonuçlarına paralel olarak Mudaly (2007) yapmış olduğu öğretim deneyinde, öğrencilerin ispatın sadece doğrulama değil açıklama aracı olarak da hizmet ettiğini anlamalarına odaklanmış ve öğrencilerin ispatın farklı işlevlerine ilişkin anlayış geliştirdiklerini, doğru gerekçelendirmeler ile tümdengelsel ispat yapabilme noktasında beceri kazandıklarını göstermiştir. Mevcut çalışmada da araştırmacı-öğretmenin, öğretim deneyinin ilk haftalarında öğrencilere açıklama ve gerekçelendirme yapmaları gerektiği talebini ilettiği, sonraki haftalarda öğretmenin yinelemesine gerek kalmadan öğrencilerin bu beklentinin farkında oldukları görülmüş ve bu durum da bu sınıfta kabul edilebilir bir matematiksel açıklamanın ve gerekçenin ne olduğuna dair kavrayış elde edilmesini sağlamıştır. Bu kavrayışa uygun olmayan bir açıklama ya da deneysel doğrulama yapıldığında, öğrencilerin bu açıklamalara kendi görüşlerini savunarak karşıt görüş sundukları ve varsayımları çürüttükleri, aksine örneklerle tutarsızlıkları ortaya çıkardıkları belirlenmiştir. Bu durum gerekçelendirme ve tartışma temasındaki normların ispatın açıklama işlevinin yanı sıra sistematikleştirme işlevi ile de ilişkili olduğunu göstermiştir. Öğrencilerin tartışmalarda anlaşılmayan noktaları sorması kabul edilebilir matematiksel açıklamalar beklendiğinin işaretidir. Dennis (2000) ve De Villiers (1999) açıklama işlevinin, bir varsayım ispatlanırken ispatta yer alan kavramların hem birbirleri ile hem de bu varsayım ile nasıl ilişkili olduğunu görünür hale getirdiğini, ispatta elde edilen sonucun ispatın içindeki ilişkileri görünür kılmasının bilginin sistematikleştirilmesine katkı sunduğunu belirtmişlerdir. Benzer şekilde Hanna (2000) açıklama işlevinin, temel matematiksel ilişkileri görünür kıldığını ve bir varsayımın neden doğru olduğunu göstermenin yeni keşiflere de yol açtığını belirtmiştir. Bu sınıfta öğrencilerin çözümlerinin doğruluğuna arkadaşlarını ikna edebilmeleri gerekçelerini açıklamalarına ve bu gerekçelerin de sınıf tarafından kabul edilebilir matematiksel gerekçeler olmasına bağlı iken kabul edilebilir matematiksel gerekçe ve ispat da çeşitli matematiksel kavramlar arasında ilişki kurulmasına bağlı olmuştur. Yackel ve Cobb (1996), ispat yaparken bir yandan iddiaların gerekçelendirildiğini bir yandan da uygun gerekçelerin kriterlerinin belirlendiğini, sosyo-matematiksel normlar olarak belirlenen bu kriterlerin sınıf tartışmalarına rehberlik ettiğini belirtmiştir. Ingram, Andrews ve Pitt (2019) ise gerekçelendirmenin bir iletişim eylemi olduğunu, öğrencilerin sundukları gerekçeler ile matematiksel kavramlar hakkında bildiklerini ve bilmediklerini ortaya çıkarmanın mümkün olduğunu, böylece matematiksel iletişim ve gerekçelendirme sayesinde öğretmenlerin daha doğru pedagojik kararlar alabileceklerini belirtmektedir. Nitekim bu çalışmada da ispatın açıklama işlevi ve iletişim işlevi ile gerekçelendirme temasındaki normların birbirlerini desteklediği görülmüştür.

Sınıf mikrokültürü, bu kültürde öğretmen ve öğrencilerin birlikte oluşturduğu sosyal ve sosyo-matematiksel normlar ile öğretmenin pedagojik seçimlerinin (seçtiği matematiksel görevler, günlük rutini, beklentileri ve öğretim stratejileri) öğrencilerin hem ispat yapma becerilerine hem de ispata ilişkin görüş ve anlayışlarına etki ettiği belirtilmektedir (Martin ve McCrone, 2003). Mevcut araştırmanın sonuçları sınıf içinde normların oluşturulmasında ve geliştirilmesinde, öğretmenin rolünü, öğretmenin kullandığı stratejileri, öğretmenin seçtiği ispat görevlerinin önemini ortaya koyması bakımından diğer çalışmalarla örtüşmektedir (Ozdemir-Baki ve Kilicoglu, 2023; Sekiguchi, 2006). Ozgur (2017) yapmış olduğu çalışmada, matematik öğretmenin bir iddianın yalnızca doğru olduğunu göstermek yerine neden doğru olduğunu da anlamının önemini vurgulayarak, öğrencilerini

varsayımlarını araştırmak, gerekçelendirmek ve genelleme yapmak için teşvik ettiğini, kabul edilebilir bir gerekçe ve ispatın ne olduğu konusunda net beklentiler belirleyerek öğrencilerinin ispat anlayışlarını destekleyebildiğini belirtmiştir. Bu araştırmada da öğretmenin tartışmaya dayalı bir öğrenme ortamında normlarla oluşturduğu net beklentiler ile öğrencilerin ispatın farklı işlevlerini deneyimlemeleri sağlanmıştır. Nitekim ispatın tüm işlevlerini anlamlı bir şekilde öğrenme ortamına dâhil eden, ispatın ilköğretim düzeyinde de yapılması gerektiğini vurgulayan ve bu sınıflarda ispat yapma deneyimlerinin nasıl yapılandırılacağı hakkında daha fazla çalışmanın yapılması gerektiğini belirten çalışmaların (Bleiler-Baxter ve Pair, 2017; Rocha, 2019) önerileri ile uyumlu sonuçlar ortaya konulmuştur.

Bu araştırma, ispatın tüm düzeylerde matematik öğretiminin bir parçası olması gerekliliği üzerine, öğretmenin pedagojik seçimleri ve doğru rehberlikle ispatın işlevlerini ve sosyal yönünü ön plana çıkararak ispatı ortaokul matematik öğretimine dâhil etmenin nasıl mümkün olduğunu göstermiştir. Ancak ispatı ortaokul matematik öğretimine dâhil ederken dikkat edilmesi gereken bir takım unsurların varlığına da dikkat çekilmiştir. Özellikle ortaokul öğrencilerinin düzeyine uygun ve kavramsal olarak erişebilecekleri argümantasyon biçimlerinin kullanıldığı ispat problemlerinin seçilmesi gerekmektedir. Aynı zamanda öğretmenin bu sınıfta matematiksel olarak geçerli kabul edilecek bir argümanın özelliklerinin, argümantasyon yönteminin ve temsil biçimlerinin çerçevesini öğrencilere açık bir şekilde önceden sunması gerekmektedir. Uygulamalara başlamadan önce mevcut çalışmada olduğu gibi öğretmenin sınıfın var olan normlarını dikkate alması ve ispat işlevlerini destekleyen sınıf normlarının ortaya çıkmasına imkân tanıyan tartışma ortamı yaratması gerekmektedir. Bu anlamda ispatın ortaokul matematik öğretim programı ile matematik öğrenmenin bir aracı olarak bütünleştirilmesi ve öğretmenlerin KARİDE modelini kullanarak öğrencilerin birbirlerinin muhakemelerini değerlendirdiği küçük grup ve sınıf tartışmalarının yapıldığı sınıf etkinliklerini tasarlamaları, bu etkinliklerde sosyal ve sosyo-matematiksel normların oluşturulmasına ve geliştirilmesine yönelik uygulamalar yapmaları önerilebilir. Bu araştırmanın sonuçları bir sınıf ve bu sınıfın mikrokültürü ile sınırlı olduğundan daha farklı düzeylerde ve sınıflarda ispat işlevlerini ve işlevler ile normlar arasındaki bağlantıların araştırılması önerilebilir. Bu yöndeki araştırmaların artması ispatın sosyal yönüne ve ortaokul düzeyinde nasıl ele alınması gerektiğine yönelik içgörü sağlayabilir.

Kaynakça

- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488. doi:10.1080/0020739031000108574
- Ayala-Altamirano, C. ve Molina, M. (2021). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*, 107(7), 359-382. doi:10.1007/s10649-021-10036-1
- Baki, A. (2006). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Trabzon: Derya Kitabevi.
- Bartlo, J. R. (2013). *Why ask why: An exploration of the role of proof in the mathematics classroom* (Doktora tezi). Portland Eyalet Üniversitesi, Portland, OR.
- Battista, M. T. (2017). Mathematical reasoning and sense making. M. T. Battista, J. M. Baek, K. Cramer ve M. Blanton, *Reasoning and sense making in the mathematics classroom: Grades 3-5 içinde* (s. 1-26). Reston, VA: NCTM Store.
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 23-40. doi:10.1007/BF00144356
- Bleiler-Baxter, S. K. ve Pair, J. D. (2017). Engaging students in roles of proof. *Education The Journal of Mathematical Behavior*, 47, 16-34. doi:10.1016/j.jmathb.2017.05.005
- Campbell, T. G., Boyle, J. D. ve King, S. (2020). Proof and argumentation in K-12 mathematics: A review of conceptions, content, and support. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(5), 754-774. doi:10.1080/0020739X.2019.1626503
- Cervantes-Barraza, J. A., Moreno, A. H. ve Rumsey, C. (2020). Promoting mathematical proof from collective argumentation in primary school. *School Science and Mathematics* 120(1), 4-14. doi:10.1111/ssm.12379
- Cilli-Turner, E. (2017). Impacts of inquiry pedagogy on undergraduate students conceptions of the function of proof. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 14-21. doi:10.1016/j.jmathb.2017.07.001
- Chua, B. L. (2016). Justification in Singapore secondary mathematics. P. C. Toh ve B. Kaur (Ed.), *Developing 21st century competencies in the mathematics classroom içinde* (s. 165-188). World Scientific. doi:10.1142/9789813143623_0010
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K. ve Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences*, 10(1/2), 113-163. doi:10.1207/S15327809JLS10-1-2_6
- Creswell, J. W. (2013). *Nitel araştırma yöntemleri: Beş yaklaşıma göre nitel araştırma ve araştırma deseni* (M. Bütün ve C. B. Demir, Ed. ve Çev.). Ankara: Siyasal Kitabevi.
- Çakır, A. (2021). *Üstün yetenekli öğrencilerin matematik sınıf kültürlerinin sosyo-matematiksel normlar bağlamında incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Çakır, A. ve Akkoç, H. (2024). Socio-mathematical norms related to problem solving in a gifted and talented mathematics classroom. *Mathematics Teaching Research Journal*, 16(1), 79-99.
- Dennis, A. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869-890. doi:10.1080/00207390050203360
- De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24(24), 17-24. <https://www.researchgate.net/publication/26478464> adresinden erişildi.
- De Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the geometer's sketchpad*. Oakland, CA: Key Curriculum Press.
- Dogan, M. F. (2015). *The nature of middle school in-service teachers' engagements in proving-related activities* (Doktora tezi). Wisconsin-Madison Üniversitesi, USA.
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1), 85-109. doi:10.1023/A:1003660018579

- Fredriksdotter, H., Nor'en, N. ve Bråting, K. (2022). Investigating grade-6 students' justifications during mathematical problem solving in small group interaction. *Journal of Mathematical Behavior*, 67(1), 1-19. doi:10.1016/j.jmathb.2022.100972
- Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education*. Toronto, Ont.: OISE Press.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49. <http://www.jstor.org/stable/40248188> adresinden erişildi.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23. doi:10.1023/A:1012737223465
- Hanna, G. ve Knipping, C. (2020). Proof in mathematics education, 1980-2020: An overview [Özel sayı]. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 1-13. doi:10.29275/jerm.2020.08.sp.1.1
- Harel, G. ve Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on on the learning and teaching of proof. F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* içinde (s. 1-60). Charlotte, NC: Information Age Pub. Inc.
- Hemmi, K. (2010). Three styles characterizing mathematicians' pedagogical perspectives on proof. *Educational Studies in Mathematics*, 75(3), 271-291. doi:10.1007/s10649-010-9256-3
- Herbst, P., Miyakawa, T. ve Chazan, D. (2010). *Revisiting the functions of proof in mathematics classrooms: A view from a theory of instructional exchanges*. Deep Blue at the University of Michigan. <http://hdl.handle.net/2027.42/78168> adresinden erişildi.
- Hersh, R. (2009). What I would like my students to already know about proof. M. Blanton, D. Stylianou ve E. Knuth (Ed.), *Teaching and learning proof across the grades: K-16 perspective* içinde (s. 17-20). Londra: Routledge.
- Ingram, J., Andrews, N. ve Pitt, A. (2019). When students offer explanations without the teacher explicitly asking them to. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 51-66. doi:10.1007/s10649-018-9873-9
- Jahnke, H. N. (2010). The conjoint origin of proof and theoretical physics. G., Hanna, H. N., Jahnke ve H., Pulte (Ed.), *Explanation and proof in mathematics: 17 philosophical and educational perspectives* içinde (s. 17-32). Berlin: Springer.
- Jones, K. ve Herbst, P. (2012). Proof, proving, and teacher-student interaction: Theories and contexts. G. Hanna ve M. De Villiers (Ed.), *ICMI study 19: Proof and proving in mathematics education* içinde (s. 261-279). Berlin: Springer.
- Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(1), 61-88. doi:10.1023/A:1013838713648
- Levenson, E., Tirosh, D. ve Tsamir, P. (2009). Students' perceived sociomathematical norms: The missing paradigm. *Journal of Mathematical Behavior*, 28(2-3), 171-187. doi:10.1016/j.jmathb.2009.09.001
- Lev, M. ve Leikin, R. (2017). The interplay between excellence in school mathematics and general giftedness: Focusing on mathematical creativity. R. Leikin ve B. Sriraman (Ed.), *Creativity and giftedness* içinde (s. 225-238). Berlin: Springer.
- Lopez, M. ve Allal, L. (2007). Sociomathematical norms and the regulation of problem solving in classroom microcultures. *International Journal of Educational Research*, 46(5), 252-265. doi:10.1016/j.ijer.2007.10.005
- McClain, K. ve Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(3), 236-266. doi:10.2307/749827
- Maher, C. A. (2009). Children's reasoning discovering the idea of mathematical proof. M. Blanton, D. Stylianou ve E. Knuth (Ed.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 curriculum* içinde (s. 120-132). Londra: Routledge.

- Makar, K. ve Fielding-Wells, J. (2018). Shifting more than the goal posts: Developing classroom norms of inquiry-based learning in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 30(1), 53-63. doi:10.1007/s13394-017-0215-5
- Martin, T. S. ve Mccrone, S. (2003). Classroom factors related to geometric proof construction ability. *The Mathematics Educator*, 7(1), 18-31. <https://www.researchgate.net/publication/228574478> adresinden erişildi.
- Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W. ve Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 95-124. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-6698-0>
- Mason, J., Burton, L. ve Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*. Pearson Education Limited.
- Merriam, S. B. (2018). *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber* (S. Turan, Çev.). Ankara: Nobel Yayıncılık.
- Meydan, A. (2021). Nitel araştırmalarda örnekleme yöntemleri. A. Uzungöz (Ed.), *Bilimsel araştırma becerileri ve araştırmada güncel desenler içinde* (s. 47-61). Ankara: Pegem Akademi
- Miles, M. B. ve Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Thousand Oaks, CA: SAGE.
- Mudaly, V. (2007). Proof and proving in secondary school. *Pythagoras*, 66, 64-75. doi:10.4102/pythagoras.v0i66.81
- Ozdemir Baki, G. ve Kilicoglu, E. (2023). Social and socio-mathematical norms constructed by teachers in classes through the development of noticing skills. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 18(1), em0723. doi:10.29333/iejme/12649
- Ozgun, Z. (2017). *Relationships between students' conceptions of proof and classroom factors* (Doktora tezi). Wisconsin-Madison Üniversitesi, Madison.
- Öksüz, H. ve Güreffe, N. (2021). 5. Sınıf matematik öğretmenlerinin öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerin bulunduğu sınıfta oluşturmayı amaçladığı sosyomatematiksel normlar. *Cumhuriyet International Journal of Education*, 10(2), 601-626. doi:10.30703/cije.742571
- Partanen, A. M. ve Kaasila, R. (2015). Sociomathematical norms negotiated in the discussions of two small groups investigating calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(4), 927-946. doi:10.1007/s10763-014-9521-5
- Rocha, H. (2019). Mathematical proof: From mathematics to school mathematics. *Philosophical Transactions*, 377(2140), 2-12. doi:10.1098/rsta.2018.0045
- Sekiguchi, Y. (2006). Mathematical norms in Japanese mathematics classrooms. D. Clarke, C. Keitel ve Y. Shimizu (Ed.), *Mathematics classrooms in twelve countries: The insiders perspective içinde* (s. 289-306). Rotterdam: Sense.
- Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education. Mathematics education library içinde* (s. 177-194). Berlin: Springer. doi:10.1007/0-306-47201-5_9
- Steffe, L. P. ve Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. R. Lesh ve A. E. Kelly (Ed.), *Research design in mathematics and science education içinde* (s. 267- 307). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321. doi:10.2307/30034869
- Tall, D. (1998). The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some?. Z. Usiskin (Ed.), *Developments in school mathematics education around the world içinde* (s. 117-136). Reston, VA: NCTM.

- Tanışlı, D. ve Yavuzsoy-Köse, N. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının genelleme sürecindeki bilişsel yapıları: Bir öğretim deneyi. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, 12(44), 255-283. <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/70448> adresinden erişildi.
- Toker, Z. (2020). Etkinlikler yoluyla sınıf içinde ispat ve sorgulama. Y. Dede, M. F., Doğan ve F. Aslan-Tutak (Ed.), *Matematik eğitiminde etkinlikler ve uygulamaları* içinde (s. 439-463). Ankara: Pegem Akademi Yayınları.
- Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Yackel, E. ve Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477. doi:10.2307/749877
- Yalman, E. ve Uzungöz, A. (2021). Nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenirlik. A. Uzungöz (Ed.), *Bilimsel araştırma becerileri ve araştırmada güncel desenler* içinde (s. 125-140). Ankara: Pegem Akademi
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2006). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yılmaz, T. Y. (2021). 7. sınıf öğrencilerinin kanıtlama süreçlerinin ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevlerinin incelenmesi (Yayımlanmamış doktora tezi). Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.
- Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. Kidron, I. ve Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: mathematical and pedagogical perspectives. G. Hanna ve M. De Villiers (Ed.), *ICMI study 19: Proof and proving in mathematics education* içinde (s. 215-229). Berlin: Springer.

Ek-1

1.Hafta Etkinlik

Bir tam sayıya bu sayıdan iki önceki tam sayı ve bu sayıdan iki sonraki tam sayı ekleniyor. Bu toplam hakkında ne söylersiniz?

Etkinliğin Odağı

*Matematiksel varsayım geliştirme

*Ulaşılan varsayımın her zaman geçerli olup olmadığını belirleme

*Cebirsel temsil kullanarak doğrudan ispat yapma (Doğrudan İspat: p önermesinin doğru olduğu kabul edilerek, q önermesi doğruluğu bilinen tanım, teorem ve kurallar kullanılarak ispatlanır.)

*Görsel temsil kullanarak görsel ispat yapma

2.Hafta Etkinlik

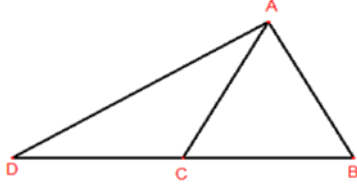
Tüm n tamsayıları için, $n^3 \geq n^2$ dir.

Etkinliğin Odağı

*Verilen önermenin doğruluğunu inceleme

*Aksine örnek vererek ispat yapma (Aksine örnek verme, verilen önermenin yanlış olduğunu gösteren en az bir örnek bularak gerçekleştirilen ispat türüdür.)

*Önermeyi n doğal sayı ise $n^3 \geq n^2$, n negatif bir tam sayı ise $n^3 < n^2$ olarak güncelleme

3.Hafta Etkinlik

$\triangle ADB$ dik üçgen, $m(\angle DAC) = 30^\circ$, $m(\angle CAB) = m(\angle ABD) = 60^\circ$ ve $|AB| = 6$ cm'dir. Buna göre D açısının ölçüsü ve $|DC|$ hakkında ne söyleyebilirsiniz?

Etkinliğin Odağı

*Matematiksel varsayımlar geliştirme

*Ulaşılan varsayımın her zaman geçerli olup olmadığını belirleme

*Doğrudan ispat yapma

4.Hafta Etkinlik

Ali baba çiftliğinde tavuk ve tavşan beslemektedir. Tavuk ve tavşanların toplam kafa sayısı 37, toplam ayak sayısı ise 98'dir. Ali babanın çiftliğinde kaç tane tavuk ve tavşan vardır?

Etkinliğin genişletilmesi:

Çiftlikteki tavuk ve tavşanların toplam kafa sayısı 40, toplam ayak sayısı 140 olsaydı ne olurdu?

Usta ve işçilerden oluşan 10 kişilik grup bir işten toplam 128 lira kazanıyor. Bir usta 20 lira bir işçi 8 lira alıyorsa bu grupta kaç işçi, kaç usta vardır?

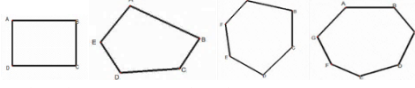
Etkinliğin Odağı

*Genel bir çözüm yöntemi geliştirme

*Belirlenen yöntemi benzer bir problemde uygulama

5.Hafta Etkinlik

Aşağıda bir dikdörtgen, bir beşgen, bir altıgen ve bir yedigen verilmiştir. Bu geometrik şekillerin iç açılarının ölçülerinin toplamını bulun.

**Etkinliğin genişletilmesi:**

- *Bir otuzgenin iç açılarının ölçüleri toplamı kaçtır?
- *n kenarlı bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı kaçtır?
- *Düzgün bir çokgenin bir iç açısının ölçüsünü nasıl buluruz?

Etkinliğin Odağı

Matematiksel varsayım geliştirme

Ulaşılan varsayımın her zaman geçerli olup olmadığını belirleme

Bir çokgenin (konveks) iç açılarının ölçüleri toplamının $(n-2) \cdot 180$ olduğunu doğrudan ispat yaparak gösterme

Geometri-cebir ilişkisi kurma: Cebirsel genellemenin geometrik açıklamasını yapma

6.Hafta Etkinlik

Bir tam sayının karesinin birler basamağındaki rakam, her zaman $A=\{0,1,4,5,6,9\}$ kümesinin bir elemanıdır.

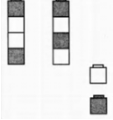
Etkinliğin Odağı

**Verilen önermenin doğruluğunu inceleme*

**Sonlu sayıdaki bir küme içerisinde yapılan ispatta tüm ihtimalleri tüketerek ispat yapma (Tüketerek ispat önermenin tanımlandığı kümede tüm durumlar tek tek denenerek önermenin doğru olduğunun gösterildiği ispat türüdür.)*

7.Hafta Etkinlik

Elimizde istediğimiz sayıda siyah ve beyaz küpler var. Bu küpleri kullanarak kuleler yapacağız. Siyah ve beyaz küplerin her ikisinden de en az bir tane kullanmak şartı ile şekilde görüldüğü gibi dört küp yüksekliğinde kaç farklı kule yapabiliriz? Eğer beş küp yüksekliğinde kule yapmamız istenseydi kaç farklı kule yapabilirdik?

**Etkinliğin Odağı**

**Matematiksel varsayım geliştirme*

**Ulaşılan varsayımın her zaman geçerli olup olmadığını belirleme*

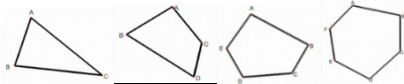
**Sistemik şekil çizerek tüketerek ispat yapma*

8.Hafta Etkinlik

Aşağıdaki çokgenlerin her birinin dış açılarının ölçülerinin toplamı kaçtır?

Etkinliğin genişletilmesi:

- Bir otuzgenin dış açılarının ölçülerinin toplamı kaçtır?
- n kenarlı bir çokgenin dış açılarının ölçülerinin toplamı kaçtır?

**Etkinliğin Odağı**

**Matematiksel varsayım geliştirme*

**Ulaşılan varsayımın her zaman geçerli olup olmadığını belirleme*

**Bir çokgenin (konveks) dış açılarının ölçüleri toplamının 360° olduğunu doğrudan ispat yaparak gösterme*

9.Hafta Etkinlik

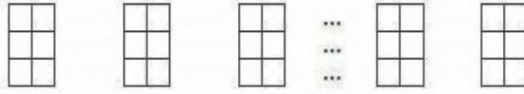
6'nın katı olan her tam sayı 3'ün de bir katıdır.

Ali: 6'nın katı olan bazı sayıları denedim. Mesela 12, 60, 606 gibi ve bunların da 3'ün katları olduğunu gördüm. Bu yüzden bu ifade her zaman doğrudur.

Ayşe: n bir tam sayı olmak üzere, 6'nın herhangi bir katını $6n$ olarak yazılabiliriz. $6n = 3.2n$ olduğunu biliyoruz ki bu 3'ün katıdır. Bu nedenle, 6'nın herhangi bir katı her zaman 3'ün de bir katı olmalıdır.

Ahmet: Elimizde 6'nın herhangi bir katı kadar kurabiyemiz olduğunu farz edelim. Bu kurabiyeleri, her birinde 6 tane olacak kadar birkaç kutuya paylaştıralım. Her bir kutuyu daha sonra içinde 3'er kurabiye olacak şekilde 2 kutuya paylaştırabiliriz. Aslında şu anda bütün kurabiyeleri her birinde 3 tane olacak şekilde paylaştırmış olduk. Bu nedenle, 6'nın herhangi bir katı her zaman 3'ün de bir katı olmalıdır.

Aslı: Aşağıdaki kare şeklindeki kartların toplam sayısı 6'nın katıdır.



Şimdi ben kare şeklindeki bu kartları aşağıdaki şekilde düzenleyebilirim.



Bu nedenle, 6'nın herhangi bir katı her zaman 3'ün de bir katı olmalıdır.

İkna ediciliği en yüksekten en düşüğe doğru sıralayınız.

Etkinliğin Odağı

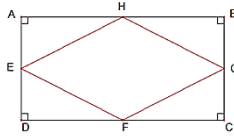
**Verilen argümanları değerlendirme*

10.Hafta Etkinlik

Şekildeki gibi bir dikdörtgenin kenarlarının orta noktaları birleştiğinde oluşan dörtgen hakkında ne söyleyebilirsiniz?

Etkinliğin genişletilmesi:

Bir karenin kenarlarının orta noktaları birleştiğinde oluşan dörtgen hakkında ne söyleyebilirsiniz?

**Etkinliğin Odağı**

**Matematiksel varsayımlar geliştirme*

**Ulaşılan varsayımın her zaman geçerli olup olmadığını belirleme*

**EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu doğrudan ispat yaparak gösterme*

11.Hafta Etkinlik

Ardışık beş doğal sayının toplamı her zaman 5'in katıdır.

Toplamı 6'nın katı olan üç ardışık tamsayı vardır.

Ardışık dört doğal sayının toplamı her zaman 4'ün katıdır.

Etkinliğin Odağı

**Verilen önermelerin doğruluğunu inceleme*

**Birinci önermede doğrudan ispat yaparak önermenin her zaman doğru olduğunu gösterme*

**İkinci önermede varlık ispat yöntemini kullanarak önermenin doğru olduğunu gösterme (Varlık ispatları, varlıksal niceleyicilerin kullanıldığı tek bir örnek vermenin yeterli olduğu ispat türüdür.)*

**Üçüncü önermede aksine örnek vererek önermenin yanlış olduğunu gösterme*

