



Öğrencilerin Doğrulayan ve çelişen rnekler İçeren Matematiksel bir İfade Karşısndaki Akıl Yrtmelerinin Araştırılması

Zülfiye Zeybek şimşek ¹, Elif Kılıçoğlu ²

z

Bu çalışmanın amacı, üstün yetenekli öğrencilerin bir matematiksel ifadeye dair hem doğrulayan hem de çelişen örneklerle karşılaştıklarında matematiksel akıl yürütme biçimlerini ele almaktır. Bu amaçla çalışma, öğrencilerin doğrulayan ve çelişen örnekler oluşturabilecekleri matematiksel ifadeler ile karşılaştıktan sonra geliştirdikleri örnek, genelleme ve argüman türlerini araştırmayı hedeflemektedir. Bilim ve Sanat Merkezi'nde eğitim gören sekiz ğrenci, yarı yapılandırılmış bireysel görüşmelere katılmak üzere gönüllü olmuştur. Çalışmanın bulguları, önerilen örnek türlerinin ve önerilme amaçlarının öğrenciler arasında farklılık gösterdiğini ortaya koymuştur. Öğrenci akıl yürütmesini araştıran çalışmalar, öğrencilerin kanıt şemalarının öğrencilerin matematiksel bir genellemenin geçerliliği için yeterli kabul ettiği örnek uzaya dair mevcut görüşlerini yansıttığını önermektedir. Bu alışma ise öğrenciler tarafından matematiksel ifadelerin doğruluğunu araştırmak için oluşturulan örnek türlerinin, aynı zamanda öğrencilerin oluşturduğu genelleme ve argüman türleri hakkında bilgi verici olduğunu göstermiştir.

Anahtar Kelimeler

Genelleme
Gerekçelendirme
Matematiksel akıl yürütme
rnek
Özel yetenekli ğrenciler

Makale Hakkında

Gönderim Tarihi: 21.06.2023
Kabul Tarihi: 10.01.2025
Elektronik Yayın Tarihi: 25.04.2025

DOI: 10.15390/EB.2025.12962

Giriş

Matematiksel argümanlar oluşturma ve başkalarının gerekçelerini eleştirme, ana okuldan lise son sınıfa kadar matematik ğretimi ve öğrenimi için temel bir bileşen olarak vurgulanmaktadır (Matematik için Ortak ekirdek Eyalet Standartları (Common Core State Standards for Mathematics) [CCSSM], 2010; Ulusal Matematik ğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics) [NCTM], 2000). Matematik eğitimcileri ve araştırmacılar, küçük yaşlardaki öğrencilerin bu tür faaliyetlere başarılı bir şekilde katılabileceğini kanıtlayarak, akıl yürütme ve ispatı tüm sınıf seviyelerinde matematik derslerinin temel bir parçası olarak kabul etme vizyonunu desteklemişlerdir (Komatsu, 2010; Stylianides ve Ball, 2008). Akıl yürütme ve ispatı öğrencilerin günlük matematiksel uygulamalarının merkezine yerleştirme ağrıları (CCSSM, 2010; NCTM, 2000), matematiksel akıl yürütme ve ispata odaklanan çalışmaların sayısındaki artışın nedenleri arasında sayılabilir. Bu çalışmaların çoğu, öğrencilerin geçerli argümanlar oluşturma veya araştırmacılar tarafından üretilen argümanları değerlendirme süreçlerine odaklanma eğilimindeyken, öğrencilerin geçersiz matematiksel ifadeleri rtme süreçlerindeki akıl yürütmeyi incelemeye odaklanan çalışmaların sayısının daha az olduğu görülmektedir (Yopp, 2015; Yopp, Ely, Adams, Nielsen ve Corwine, 2020; Zeybek şimşek, 2021).

¹ Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, zulfiye.zeybek@gop.edu.tr

² Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, elifacil@mku.edu.tr

Geçersiz bir matematiksel iddiayı çürütme süreci oldukça zorlu bir görevdir (Giannakoulis, Mastorides, Potari ve Zachariades, 2010; Zeybek Şimşek, 2021) ve bu süreç, argümantasyon bilgisi, matematiksel dili ustalıkla kullanma becerisi ve kavramsal öğrenme gibi birçok faktörden etkilenmektedir (Yopp, 2015; Yopp vd., 2020).

Araştırmalar, öğrencilerin ve öğretmenlerin geçersiz genellemeler karşısında çeşitli davranışlar sergilediğini göstermektedir (Balacheff, 1991; Giannakoulis vd., 2010; Yopp, 2015; Zeybek Şimşek, 2021). Örneğin, Balacheff (1991) bir öğrencinin karşıt örnekle karşılaştığında, eylemlerinin orijinal varsayımın koşulunu (veya tanımını) değiştirmekten, karşıt örneği yetersiz bulup göz ardı etmeye kadar değişebileceğini göstermiştir. Benzer şekilde Yopp (2015) çalışmasında, bir karşıt örnek belirlendikten sonra öğretmen adayları tarafından dikkatsizce geliştirilen iddiaları belgelemiştir. Tüm bu bulguların, bilişsel çatışma ve öğrencilerin karşıt örnek sonrasında oluşan bilişsel çatışmayı nasıl ele aldıklarıyla ilgili olduğu düşünülmektedir. Birçok araştırmacı öğrenmenin, öğrencilerin daha önce oluşturulmuş zihinsel yapıyla çelişen yeni bilgilerle karşılaştıklarında bilişsel çatışma yoluyla gerçekleştiğini belirtmektedir (Gal, 2019; Piaget, 1975; Zaskis ve Chernoff, 2008). Bu çalışmada da benzer olarak, öğrenmenin bilişsel çatışma yoluyla mevcut zihinsel yapının değiştirilmesi veya yeni bir zihinsel yapının geliştirilmesiyle oluştuğu kabul edilmektedir. Bu nedenle karşıt bir örnek bulmanın yarattığı bilişsel çatışma, öğrenenlerin entelektüel merakını ve akıl yürütme becerilerini beslemek için önemli bir mekanizma görevi üstlenmektedir. Stylianides ve Stylianides (2022), öğrencilerin akıl yürütme ve ispat becerilerini geliştirmek için bilişsel çatışmayı teşvik eden sınıf içi etkinlikleri kullanmayı önemli bir adım olarak teşvik etmektedir. Ancak Gal (2019), tüm öğrencilerin bilişsel çatışmayla başa çıkmaya hazır olmadığını ve muhakeme yeteneğiyle ilgili zorlukların bu tür çatışmalarla başa çıkmayı engelleyici bir faktör olabileceğini savunmaktadır.

Bazı araştırmacılar, yanlış matematiksel ifadelerin daha fazla irdelenmesini, öğrencilerin akıl yürütme süreçlerini araştırmak için bir fırsat olarak görürken, bazı araştırmacılar ise bu hususta farklı perspektiflere sahiptir. Örneğin Komatsu (2010), beşinci sınıf öğrencilerinin bir karşıt örnek bulduklarında yaşadıkları bilişsel çatışmayla başa çıkabildiklerini ve karşıt örnekleri kullanarak gerçek matematiksel süreçleri deneyimleyebildiklerini belgelemiştir. Yopp (2015) ise “bir karşıt örneğin varlığının ötesine geçme girişimlerinin, karşıt örneklerin sınıfları hakkında veya orijinal iddiayı doğrulayan durumlar hakkında iddialarda bulunma gibi, karşıt örneğin yeterli olacağı durumlarda sorunlu tepkilere yol açabilir” (s. 79) diye belirterek, bu tür etkinliklerin sınırlılıklarını dile getirmiştir. Karşıt bir örnek oluşturmanın ötesine gitme girişimleri sorunlu tepkilere yol açsa da bu tür girişimlerin, öğrencilerin matematiksel akıl yürütme süreçlerini geliştirmek için önemli olduğu düşünülmektedir.

Bu çalışmada hem doğrulayan hem de çelişen örneklerin önerilebileceği matematiksel ifadelerin bilişsel çatışmaya neden olabileceği ve bir karşıt örnek oluşturmanın ötesine geçme girişimlerinin başlatılmasına yol açarak, öğrencilerin entelektüel meraklarını destekleyebileceği öngörülmektedir. Matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin örüntüleri, ilişkileri yakalama arzusu ve genelleme yetenekleri açısından akranlarından ayrıştığını gösteren geniş bir literatür bulunduğu göz önüne alındığında (Leikin, 2021; Sriraman, 2004), üstün yetenekli öğrencilerin hem doğrulayan hem de çelişen örnekler belirlendiğinde zengin davranışlar sergileyebileceği düşünülmüştür. Diğer bir deyişle, matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin, bu tür matematiksel ifadeler için yalnızca bir karşıt örnek önermekle kalmayıp, genellemeler ve argümanlar inşa etme çabalarında bulunacağı öngörülmüştür. Bu nedenle, bu çalışmada aşağıdaki araştırma sorularına cevap aranmıştır:

1. Matematiksel olarak üstün yetenekli öğrenciler hem doğrulayan hem de çelişen örneklerin bulunabileceği matematiksel ifadelerle karşılaştıklarında ne tür akıl yürütmelerde bulunurlar?
 - a. Hangi tür örnekler oluştururlar?
 - b. Hangi tür genellemelerde bulunurlar?
 - c. Oluşturdukları genellemeleri kanıtlamak için hangi tür argümanlar oluştururlar?
2. Matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin önerdiği örnek türleri ile oluşturdukları genellemeler ve argümanlar arasında bir ilişki var mıdır?

Teorik Çerçeve

Örnekler

Son yıllarda yapılan çalışmalar, örneklerin akıl yürütme ve ispat oluşturmadaki önemli rollerine vurgu yapmaktadırlar (Alcock, 2004; Alcock ve Weber, 2010; Ellis vd., 2019). Bu çalışmalar özellikle gerekçelendirme, genelleme ve ispat süreçlerinde örneklerin farklı rollerine ve kullanımına odaklanmaktadırlar (Ellis vd., 2019). Örnekler, varsayımları anlamlandırmanın temel bir yaklaşımı olarak (Alcock, 2004), öğrencilerin genelleme yapma eylemlerini destekleme aracı olarak (Goldenberg ve Mason, 2008) ve ispat sürecinde yapısal ilişkileri analiz etme aracı olarak (Goldenberg ve Mason, 2008; Pedemonte ve Buchbinder, 2011) farklı rol ve misyonlara sahiptirler.

Buchbinder ve Zaslavsky (2009), matematiksel ifadelerin doğruluk değerini belirleme konusunda farklı türdeki örneklerin statüsünü araştırmıştır. Örnekleri doğrulayan, doğrulamayan, çelişen veya alakasız olarak farklı kategorilerde sınıflandırmışlar ve bu örneklerin statüsünün matematiksel ifadenin evrensel veya varoluşsal olup olmadığına göre değiştiğini savunmuşlardır. Bu nedenle, ispat oluşturma sürecinde çeşitli örnek türlerinin sahip olduğu farklı rol ve misyonların farkında olmak önemlidir. Bu çalışmada, örneklerin sahip olduğu bu rol ve misyonlarının farkında olmanın öğrencilerin ön referans bilgileri ve kanıt şemalarıyla yakından ilişkili olduğu ön görülmektedir. Balacheff (1991) bu konudaki benzer görüşünü şu sözlerle dile getirmiştir: "...referans bilginin (bilimsel bilgi veya öğretilmesi gereken bilgi) varlığı, bir olgunun bu bilgiyle çelişkili olup olmadığına karar verme hakkını tanır" (s. 2).

Watson ve Mason (2005), örneklerin izole olmadığı, bunun yerine potansiyel örneklerin bir sınıfı olarak algılandığını savunur ve bu durumu "örnek uzay" olarak tanımlarlar (s. 51). Stylianides ve Stylianides (2009), öğrencilerin örnek uzayları ile kanıt şemaları arasında bir bağ kurmuş ve bunları kanıtlama için örnek uzaylar olarak adlandırmışlardır. Harel ve Sowder (1998) tarafından önerilen ana kanıt şemalarını ve bunlara karşılık gelen örnek uzayları hiyerarşik olarak sunmuşlardır (ayrıntılı bilgi için bkz. Stylianides ve Stylianides, 2009). Stylianides ve Stylianides (2009): "Bir öğrencinin kanıt şeması, matematiksel bir genellenmenin doğrulanması için yeterli kabul edilen örneklerin topluluğuna ilişkin mevcut görüşünü yansıtır, yani öğrencinin doğrulama için kullandığı kişisel örnek uzayını yansıtır" (s. 320) ifadesi ile kanıt şeması ve örnek uzay arasındaki ilişkiyi ifade etmişlerdir. Öğrencilerin kanıt şemaları örnek uzaylarını yansıtıyorsa, o zaman öğrencilerin oluşturdukları örneklerin, onların kanıt şemaları ve referans bilgileri hakkında bilgi verici olması gerektiği düşünülmektedir. Watson ve Mason (2005) örnekleri "kavramların ve ilkelerin illüstrasyonları" olarak ele almaktadırlar. Benzer olarak bu çalışmada, öğrenciler tarafından üretilen örneklerin onların kanıt şemalarının illüstrasyonları olabileceği ön görülmektedir. Öğrencilerin önerdiği örnekleri analiz etmek için bu çalışmada Stylianides ve Stylianides (2009) tarafından önerilen kanıt şemalarına karşılık gelen örnek uzayları kullanılmıştır (bkz. Tablo 1).

Tablo 1. Örnek Türleri ve Kanıt Şemalarına Karşılık Gelen Örnek Uzay

Doğrulayan Örnek			Çelişen Örnek		
Naif Örnek	Kritik Örnek	Geleneksel Örnek	Naif Örnek	Kritik Örnek	Geleneksel Örnek
Öğrenciler kontrol edilmesi uygun olan veya rastgele seçilen birkaç doğrulayıcı örneği dikkate alırlar.	Öğrenciler bir tür stratejiye dayalı olarak seçilen örnekleri dikkate alırlar.	Öğrenciler matematiksel bir ifadenin kapsam alanındaki tüm doğrulayıcı örnekleri dikkate alırlar.	Öğrenciler kontrol edilmesi uygun veya rastgele seçilen birkaç çelişkili örneği dikkate alırlar.	Öğrenciler bir tür stratejiye dayalı olarak seçilen çelişkili örnekleri dikkate alırlar.	Öğrenciler matematiksel bir ifadenin kapsam alanındaki tüm çelişen örnekleri dikkate alırlar.

Genellemeler

Mason, Burton ve Stacey (2010), genelleme sürecini “birkaç örnekten hareketle geniş durumlar sınıfı hakkında tahminlerde bulunma” (s. 8) olarak tanımlamaktadırlar. Dörfler (1991) ise genellemeyi “bir nesne ve düşünmenin ve iletişimin bir aracı” olarak ifade etmektedir (s. 63). Genelleme sürecinin matematik eğitim ve öğretiminin kritik bir bileşeni olduğu ve her seviyedeki matematik sınıflarının merkezinde yer alması gerektiği konusunda hiç şüphe yoktur (Blanton, Levi, Crites ve Dougherty, 2011; Mason, Burton ve Stacey, 2010). Ancak, öğrencilerin genellemelerini inceleyen çalışmalar öğrencilerin genelleme ifadelerini tanıma, kullanma ve oluşturma konusundaki zorluklarını sıkça rapor etmektedirler (English ve Warren, 1995). Her ne kadar hangi bilginin genelleme olarak sayılacağı öğrenciler veya matematikçiler arasında farklılık gösterse de, bir dizi durumdan matematiksel bir ilişki yakalamak veya durumlar arasında ortak bir öge bulmak ve bunu yeni bir duruma taşımak, şüphesiz karmaşık bir düşünme ve akıl yürütme süreci gerektirmektedir (English ve Warren, 1995).

Dörfler (1991), genellemeleri empirik genelleme ve teorik genelleme olarak iki kategoriye ayırmaktadır. Dörfler’e göre empirik genelleme, nesnelerin ortak özelliklerini veya niteliklerini tespit ederek oluşturulduğu için sorunlu olarak kabul edilmektedir. Teorik genelleme ise, nesneler arasındaki ilişkiler gibi temel nitelikleri soyutlayarak oluşturulur ve Dörfler’in ifade ettiği gibi bir “eylem sistemi” ile başlar (Dörfler, 1991, s. 71). Harel (2001) öğrencilerin oluşturduğu genellemeleri benzer şekilde sonuç genellemesi ve süreç genellemesi olarak iki sınıfa ayırmıştır. Harel (2001): “süreç genellemesinde, öğrenciler süreçteki düzenliliğe odaklanırken; sonuç genellemesinde ise, sonuçtaki düzenliliğe odaklanırlar” (s. 11) ifadesiyle bu genellemeler arasındaki farkın, odaklanılan örüntünün yeri ile ilgili olduğunu ifade etmektedir. Bu çalışmada, öğrencilerin hem doğrulayan hem de çelişen örneklerle karşılaştıklarında oluşturdukları genellemeleri ayırt etmek için süreç genellemesi ve sonuç genellemesi olacak şekilde benzer bir sınıflandırma yapılmıştır. Öğrenciler, süreçteki düzenliliği görüp daha genel bir akıl yürütmeye dönüştürdüklerinde, bu genellemeler süreç genellemesi olarak sınıflandırılmıştır. Öte yandan, öğrenciler yalnızca sonuçtaki örüntüyü görüp örnekler arasında daha derin bir ilişkilendirmeyi inceleme amacı gütmediklerinde, bu genellemeler sonuç genellemesi olarak adlandırılmıştır.

Argümantasyon

Matematiksel akıl yürütme ve ispat, derin matematiksel öğrenimin temel bir bileşeni olarak görülmektedir (Harel ve Sowder, 1998; NCTM, 2000; Stylianides ve Stylianides, 2009). Ancak araştırmalar tüm eğitim seviyelerindeki öğrencilerin argümanlar oluşturma konusunda ciddi sorunlar yaşadığını ve matematiksel ifadelerin geçerliliğini belirlemek için genellikle belirli örneklerle güvindiklerini göstermektedir (empirik kanıt şeması) (Healy ve Hoyles, 2000). Stylianides (2007), geçersiz matematiksel akıl yürütme (empirik akıl yürütme) ile geçerli akıl yürütme (dedüktif akıl yürütme) arasındaki temel farkın argümantasyon biçimlerinde yattığını belirtmektedir. Yani empirik argümanlar, tüm durumların yalnızca uygun bir alt kümesini ele alarak matematiksel bir genellenin doğruluğunu kanıtlamak için güvensiz bir yöntem sağlarken, kanıtlar genellenin kapsamındaki tüm durumları dikkate alarak kesin delil sunmaktadırlar.

Harel (1998), daha güvenilir bir doğrulama yöntemi sağlama arzusunu entelektüel ihtiyaç olarak tanımlamaktadır. O halde bu çalışmada ele alınan temel soru, öğrencilerin genellenin alanındaki tüm unsurları dikkate alarak kesin kanıt sağlama ihtiyacını hissedip hissetmedikleridir. Stylianides ve Stylianides (2009), öğrencilerin matematiksel bir iddiayı kanıtlarken matematiksel olarak daha güvenli bir yol oluşturmaya yönelik entelektüel bir ihtiyaç hissedip hissetmediklerine dayalı olarak oluşturdukları kanıt şemalarını, mevcut ilgili literatür (Balacheff, 1988; Harel ve Sowder, 1998) ışığında, empirik, empirik olmayan ve geleneksel kanıt şemaları olarak sınıflandırmışlardır. Bu çalışmada öğrenciler tarafından oluşturulan argümanları değerlendirmek için Stylianides ve Stylianides (2009) tarafından önerilen kanıt şemalarına benzer bir yaklaşım izlenmiştir (bkz. Tablo 2).

Tablo 2. Argüman Türleri ve Özellikleri

Empirik Argüman	Empirik Olmayan Argüman	Geleneksel Argüman
Öğrenciler birkaç örneğin sunduğu doğrulayıcı kanıtlara dayanarak argüman oluştururlar (Balacheff, 1988).	Öğrenciler empirik argümanları matematiksel bir genellemeyi doğrulamak için güvenli olmayan yöntemler olarak tanırlar. Ancak, geleneksel argümanlardan sapan argümanlar oluştururlar (Stylianides ve Stylianides, 2009).	Öğrenciler matematiksel bir genellemeyi doğrulamak için güvenli bir yöntem olarak ispatları tanır ve ispat oluşturabilirler (Stylianides ve Stylianides, 2009).

Matematiksel Olarak Üstün Yetenekli Öğrenciler

Araştırmacılar matematiksel yetenekleri yüksek öğrencilerin, problem çözme sürecinde akranlarına göre daha fazla sabır ve azim gösterdiğini (Budak, 2012) ve bu öğrencilerin problem çözme süreçlerinde daha fazla entelektüel merak ve yaratıcılık sergileme eğiliminde olduklarını (Hong ve Aquí, 2004) ortaya koymuşlardır. Matematiksel yetenekleri yüksek öğrencilerin genellikle sadece bir cevap bulmanın ötesine geçerek yapısal ilişkileri kavramaya çalıştıkları ve birden fazla strateji aradıkları göz önüne alındığında (Gorodetsky ve Klavir, 2003), birden fazla strateji genelleme ve/veya gerekçelendirme gerektiren görevlerin bu öğrencilerin yaratıcılığına daha iyi hizmet edebileceği düşünülebilir (Berg ve McDonald, 2018). Benzer şekilde Leikin (2021), matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin problemleri birden fazla yolla çözmeleri gerektiğinde daha esnek ve yaratıcı olduklarını savunmaktadır. Araştırmacılar, matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin düşünme ve akıl yürütme biçimlerinin matematikçilerin düşünme biçimleriyle benzer ve paralel olduğunu belirtmektedirler (Leikin, 2021; Sriraman, 2004). Matematikçilerin bir matematiksel ifadenin doğruluğu/yanlışı hakkında sezgi geliştirmeye çalışırken, formal kanıtlama yöntemlerini benimsemeden önce örnekler ve karşıt örnekler oluşturmaya gayret ettiği ve formal olmayan kanıtlama yöntemlerini bilinçli olarak benimsedikleri bilinmektedir (Alcock ve Inglis, 2008; Sriraman, 2004). Bu nedenle, matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin de matematiksel ifadelerin doğruluğunu incelerken ifade hakkındaki sezgilerini oluşturmak için çeşitli türde örnekler, genelleme ve gerekçelendirmeler oluşturmaya eğilimli olacakları ön görülebilir. Matematiksel olarak üstün yetenekli olan öğrencilerin tüm bu özellikleri, bu çalışmanın katılımcıları olarak seçilmelerinin nedenleri arasında yer almıştır.

Yöntem

Fenomenografik araştırma, eğitim çalışmalarında öğrencilerin aynı kavramdan ne anladıklarını ortaya koymak ve öğrencilerin algılarındaki çeşitliliği nitel olarak haritalamak için kullanılan bir araştırma yöntemidir (Trigwell, 2006; Marton, 1986). Bu yöntem, farklı bireylerin belirli kavramları nasıl anladıklarını veya nasıl algıladıklarını analiz etmek için eğitim araştırmalarında yaygın olarak kullanılan bir tekniktir (Wihlborg, 2004). Zamanla bu yöntem, bazı öğrencilerin diğerlerinden neden daha iyi öğrendiğini anlamak için eğitim araştırmalarında kullanılan bir araç olarak gelişmiştir. Öğrencilerin farklı örnek türleri ile karşılaştıklarında nasıl akıl yürüttüklerini veya bilişsel bir çatışma yaşadıklarında bu durumu nasıl ele aldıklarını ortaya koyma sürecinde, öğrenci davranışlarının benzerlikleri ve farklılıklarıyla kategorize edilmesi ve bu kategoriler arasındaki uyumun ortaya konması, bu çalışmayı fenomenografik bir çalışma haline getirmektedir.

Katılımcılar

Bu çalışmanın amacının hem doğrulayan hem de çelişen örnekler içeren matematiksel ifadelerle karşı karşıya kalındığında öğrenci akıl yürütme sürecini incelemek olduğu göz önüne alındığında, matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel genellemeler ve argümanlar oluşturma konusunda daha fazla istek ve azme sahip olabilecekleri ön görülmüştür. Böylelikle katılımcılar, Türkiye’de Wechsler Zekâ Testi puanlarına göre seçildiği bir Bilim ve Sanat Merkezi’ne kayıtlı sekiz öğrenciden oluşmaktadır.

Bilim ve Sanat Merkezleri, Türkiye'de üstün yetenekli öğrencilerin eğitim uygulamalarının gerçekleştirildiği, ilkökul ve ortaokul seviyelerinde eğitim veren kurumlardır. Bu merkezler, 1997 yılında Özel Eğitimle İlgili Kanun Hükmünde Kararname ile kurulmuş olup, yetenekli öğrencilerin formal ilkökul ve ortaokul eğitimlerinin yanı sıra yeteneklerine göre desteklenmesini amaçlamaktadır (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2022). Bu merkezlere kabul edilebilmek için öğrencilerin genellikle ilkökul öğretmenleri tarafından önerilmesi gerekmektedir. Merkezler, öğrencileri kabul etmeden önce adaylara iki aşamalı bir test uygulamaktadır. Bu testlerden biri Toplam Yetenek Testi, diğeri ise Wechsler Zekâ Testi (WISC-R)' dir. WISC-R, bireylerin zihinsel performansını belirlemek için geliştirilmiş bir bireysel zekâ testidir (Wechsler, 1975). WISC-R testinde 130 ve üzeri puan alan öğrenciler, yetenekli olarak kabul edilmekte ve merkezlere kaydolma hakkına sahip olmaktadır (Akkanat, 2004).

Çalışmanın katılımcıları, amaçlı örnekleme yöntemi doğrultusunda belirlenmiştir. Amaçlı örnekleme, nitel araştırmalarda sınırlı kaynakların etkili kullanımını sağlamak için bilgi zenginliği olan veriler elde etmek amacıyla yaygın olarak kullanılan bir tekniktir (Patton, 2002). Çalışmanın amacı öğrencilerin akıl yürütme becerilerini ortaya koymak olduğundan, kendilerini rahatça ifade edebilen ve düşüncelerini açıklamaktan çekinmeyen öğrencilere ihtiyaç duyulmuştur. Bu nedenle, Bilim Sanat Merkezi'ndeki yöneticiler ve matematik öğretmenleriyle iletişime geçilmiş ve çalışmanın amacına uygun iletişim becerilerine sahip öğrencilerin önerilmesi istenmiştir. Katılımcı öğrencilerin hepsi iyi iletişim becerilerine ve iyi matematik puanlarına sahip, çalışmaya gönüllü öğrencilerdir. Çalışma esnasında Murat, Kemal, Melike ve Nilay sekizinci sınıfa, Binnur, Ceylin, Demet ve Reyhan ise yedinci sınıfa devam etmektedir (çalışmada kullanılan tüm öğrenci isimleri takma isimlerdir). Çalışma esnasında katılımcı öğrencilerin farklı sınıf seviyelerinde bulunmalarına rağmen, farklı sınıf seviyelerindeki öğrencilerin akıl yürütme becerilerinin karşılaştırması bu çalışmanın kapsamı dışındadır. Katılımcı öğrencilerin velilerinden öğrencilerin çalışmaya katılması için gerekli izinler alınmıştır.

Göreve Dayalı Bireysel Görüşmeler

Öğrencilerin hem doğrulayan hem de çelişen örneklerin oluşturulabildiği matematiksel ifadelerle karşı karşıya kaldıklarında akıl yürütmelerini araştırmak için matematiksel görevlerin yer aldığı yarı yapılandırılmış bir görüşme protokolü tasarlanmıştır.

Sizce doğru mu, yanlış mı? Açıklayınız.

Matematiksel İfade 1: "Üç ardışık sayının toplamı her zaman tek sayıdır"

Matematiksel İfade 2: "Pay ve payda arasındaki fark küçükse, kesir daha büyüktür"

Matematiksel İfade 3: "Bir dörtgenin en az bir köşegeni, dörtgeni aynı alana sahip iki üçgene böler"

Matematiksel İfade 4: "Bir dikdörtgenin çevresi artarsa, alanı da artar"

Şekil 1. Görüşme görevleri

Görüşme görevleri, dört matematiksel ifadeyi içermekte olup, bu ifadeler mevcut literatür gözden geçirilerek tasarlanmıştır (örneğin, Ball, Hoyle, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002; Ma, 1999; Zaskis ve Chernoff, 2008). Çalışmanın gerçekleştiği süreçte uygulanan öğretim programına göre, görüşme görevlerinde yer alan tüm temel kavramlar (kesirler, dörtgenler, çevre ve alan formülleri) beşinci ve altıncı sınıf seviyesinde ele alınmaktadır (MEB, 2018). Matematiksel ifadelerde yer alan temel kavramların daha önceki sınıf seviyelerinde yer aldığı göz önünde bulundurulduğunda, bu görevlerin öğrencilerin kavramsal erişim sınırları içerisinde olduğu düşünülmüştür. Görüşmeler esnasında kullanılan her ifade için hem doğrulayan hem de çelişen örneklerin önerilebileceği düşünüldüğünde ise, görevlerin öğrencilerde bilişsel çatışmaya yol açacağı öngörülmüştür.

Yarı yapılandırılmış görüşmeler her katılımcıyla araştırmacılardan biri tarafından gerçekleştirilmiş olup, tüm görüşmeler video ile kayıt altına alınmıştır. Araştırmacılar, katılımcı öğrencilerle daha önce çalışmamış veya onları gözlemlememişlerdir. Araştırmacıların rolü, görüşme

sırasında öğrencilerin düşüncelerini yansıtma rehberlik etmektir. Bireysel görüşmeler sırasında, katılımcılara her bir matematiksel ifade tek tek sunulmuş ve her ifade üzerinde çalışmaları için yeterli zaman verilmiştir. Tüm görüşmeler yaklaşık 45-60 dakika sürmüştür. Katılımcılara görüşme sırasında bir tablet bilgisayar, kâğıt ve kalem sunulmuş ve katılımcılar, matematiksel ifadelerin doğruluğunun incelenmesi sürecinde şekiller çizme, oluşturdukları örnek, genelleme veya argümanları yazma konusunda teşvik edilmişlerdir. Tüm kâğıtlar ve ekran görüntüleri veri analizi için toplanmıştır. Görüşmeler esnasında katılımcıların doğrulama süreçlerini daha iyi kavrayabilmek için çeşitli düşündürücü sorular kullanılmıştır (örneğin, “Bu örnekleri neden öneriyorsun?”, “Başka bir örnek önermeni daha istesem, bu örnek ne olurdu?”). Katılımcılar, görüşmeler sırasında önerdikleri örneklerle ilgili olarak “bu örnekler, ifadenin her zaman doğru olmayacağını gösteriyor” veya “10'a kadar olan sayıları denediğimizde, aynı şekilde devam edecektir” gibi genellemeler yaptıklarında, araştırmacılar, bu genellemelere atıfta bulunarak katılımcılara ek sorular yöneltilmiş ve örneklerini kullanma biçimlerini daha derinlemesine anlamayı hedeflemişlerdir. Ayrıca, katılımcıların oluşturduğu argümanlar da düşündürücü sorular olarak kullanılmıştır (örneğin, “Bu argümanla öğretmeni ikna edebilir misin?”, “İddianı yeterince gerekçelendirdiğini düşünüyor musun?”).

Veri Analizi

Veri analizi, bireysel görüşmelerin transkript edilmesi ve katılımcıların her matematiksel ifadeye verdikleri yanıtların gözden geçirilmesi ile başlamıştır. Katılımcıların örnekler, genellemeler ve argümanlar oluşturmadaki akıl yürütmelerini açıklamak için sürekli karşılaştırma yöntemi (Glaser ve Strauss, 1967) kullanılmıştır. Bu çalışmada veri analizi süreci genel olarak şu şekilde gerçekleşmiştir: (1) araştırmacılar, tüm katılımcı yanıtları bireysel olarak gözden geçirip katılımcıların görüşmeler sırasında oluşturdukları örnekleri, genellemeleri ve argümanları ayrı ayrı bireysel olarak belirlemişlerdir; (2) araştırmacılar, mevcut literatüre dayalı oluşturulan kodlama şemalarını kullanarak belirlenen örnekleri, genellemeleri ve argümanları ayrı ayrı birbirlerinden bağımsız olarak kodlamışlardır (bkz. Tablo 1 ve Tablo 2); (3) araştırmacılar, bireysel kodlarını bir araya gelip karşılaştırmış ve yeni kodların üretilmesine veya mevcut kodların düzenlenmesine neden olabilecek herhangi bir uyumsuzluğu tartışarak sonuçlandırmışlardır.

Katılımcıların bireysel görüşmelerdeki yanıtların kodlanması üç aşamada gerçekleşmiştir. İlk aşamada, katılımcının her matematiksel ifade için oluşturdukları örnekler iki kategoriye ayrılarak sınıflandırılmıştır: Doğrulayan Örnekler— sunulan ifadenin doğru olduğunu gösteren örnekler— ve Çelişen Örnekler— sunulan ifadenin yanlış olduğunu gösteren örnekler. Daha sonra, çelişen ve doğrulayan örnek türleri ise, Stylianides ve Stylianides (2009) tarafından tanımlanan kanıt şemalarına karşılık gelen örnek uzay kategorilerine göre sınıflandırılmıştır (bkz. Tablo 1). Örneğin Nilay, “Bir dörtgenin tüm kenarları eşit olduğunda, karşıt kenarları eşit olduğunda ve hiçbir kenar eşit olmadığında [ifadenin] doğru olup olmadığını görmek istedim” diyerek bir kare, bir dikdörtgen ve bir yamuğu dikkate alma stratejisini açıklamıştır. Bu söylemde görüldüğü gibi öğrenci önerdiği örneklerin bir stratejiye dayanarak seçildiğini belirttiğinden ve o stratejiye açıkça atıfta bulunduğundan, bu örnekler kritik örnek olarak kodlanmıştır.

Kodlama sürecinin ikinci aşamasında, katılımcıların belirlenen genellemeleri iki ana kategoriye ayrılarak sınıflandırılmıştır: Sonuç Genellemesi ve Süreç Genellemesi. Her genelleme türü de doğru ve yanlış olacak şekilde iki alt kategoride ele alınmıştır. Öğrenciler, oluşturdukları örneklerin sonuçlarındaki düzenliliği, bu örneklerin altında yatan yapıyı daha fazla araştırma amacı gütmekten fark ettiklerinde, genellemeleri sonuç genellemeleri olarak kodlanmıştır. Öğrenciler, yalnızca örneklerin sonuçları arasındaki düzenliliği görmekle kalmayıp, bu örnekler arasında bir ilişki de tanıyıp yakaladıklarında, genellemeleri süreç genellemeleri olarak kodlanmıştır. Örneğin Reyhan, matematiksel ifade 1 için “Eğer çift sayılar, tek sayılardan fazlaysa, sonuç tek sayı olarak çıkar ya da tam tersi” iddiasında bulunmuştur. Reyhan’ın bu ifadesinde açıkça görüldüğü gibi, öğrenci ifadenin yalnızca yanlış olduğunu fark etmekle kalmayıp, daha önce önerdiği örnekler arasında doğru bir ilişki yakalamıştır. Bu nedenle, Reyhan’ın önerdiği bu genelleme doğru süreç genellemesi olarak sınıflandırılmıştır.

Kodlama sürecinin son aşamasında ise, katılımcıların oluşturduğu argümanlar, matematiksel açıdan genellenmenin doğruluğunu onaylamak için güvenilir veya güvenilir olmayan bir yöntem kullanılıp kullanılmadığına göre empirik, empirik olmayan ve geleneksel olarak kodlanmıştır (bkz. Tablo 2). Örneğin Murat, sunulan ifade [Matematiksel İfade 1] için şu şekilde bir gerekçe sunmuştur: “Üç ardışık sayı olacaktır. Bu durumda ya çift-tek-çift ya da tek-çift-tek olacaktır. Eğer tek-çift-tek yaparsak, iki tek sayı ekleriz ve sonuç çift sayı olur. Sonra, çift sayı ve çift sayı bir çift sayı oluşturur.” Murat, tek-çift-tek sayıların toplamının çift sayı olacağını ve bu durumun da ifadeye aykırı olacağını fark etmiştir. Ancak, Murat’ın bu gerekçesi örnekler kullanılarak inşa edilmemesine rağmen, iki tek sayının toplamının neden çift sayı olacağını açıklamakta yetersiz kalmıştır. Tüm bunlar, Murat’ın sunduğu bu gerekçenin empirik olmayan bir argüman olarak sınıflandırılmasının nedenleri arasında yer almıştır.

Kodlamalar, iki araştırmacı tarafından eşzamanlı olarak gerçekleştirilmiş ve kodlama benzerliklerini ve farklılıklarını gösteren kodlama güvenilirliği hesaplanmıştır. Kodlayıcılar arası güvenilirlik elde etmek için, Miles ve Huberman (1994) tarafından belirtilen güvenilirlik formülü kullanılmıştır ($Güvenilirlik = Uzlaşma / (Uzlaşma + Anlaşmazlık) \times 100$). Veri analizinin güvenilirliği için iki kodlayıcı arasında en az %70’lik bir güvenilirlik yüzdesi elde edilmesinin gerekli olduğu ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu çalışmada, kodlama güvenilirlik yüzdesi 0.94 olarak bulunmuştur. Araştırmacılar, öğrencilerin oluşturduğu örnek türlerini (doğrulayan ve çelişen örnekler) belirlemekte ve öğrencilerin öne sürdükleri genellemelerin doğru veya yanlış olup olmadığı konusunda tam fikir birliğine sahip olmuşlardır. Ancak, öğrencilerin oluşturdukları örneklerin naif, kritik veya geleneksel olarak sınıflandırılması hususunda yer yer farklılık göstermişlerdir. Örneğin Murat’ın “...Üç ardışık sayı olacaktır. Bu durumda ya çift-tek-çift ya da tek-çift-tek olacaktır. Tek-çift-tek yaparsak iki tek sayı ekleriz ki bu da çift sayı olur. Sonra bir çift sayıya bir çift sayı ekleriz. Diyelim ki bu sayılar 1, 2, 3 olsun. 1’i 3’e eklersek 4 olur ve sonra toplama 2 eklersek 6 olur ki bu da çift sayı olur. Bu yüzden yanlış diyorum!” ifadesinde araştırmacılarından biri, öğrencinin örnekleri stratejik olarak seçtiği gerekçesiyle öğrencinin önerdiği örnekleri kritik örnek olarak kodlamıştır. Ancak diğer araştırmacı, öğrencinin örnekleri genel fikri açıklığa kavuşturmak için bir araç olarak kullandığını ve dahası karşıt örnek kümeleri oluşturmanın bir yolunu önerdiğini belirtmiştir. Bu nedenle Murat’ın oluşturduğu örneklerin geleneksel örnekler olarak değerlendirilmesi gerektiğini ileri sürmüştür. Araştırmacıların bu uyumsuzluk hakkındaki tartışmaları tam fikir birliğine varılincaya kadar devam etmiş ve tartışmaların sonucunda Murat geleneksel örnek sütununa dâhil edilmiştir (bkz. Tablo 3).

Bulgular

Bu bölümde, öncelikle öğrencilerin bireysel görüşmelerde kullanılan her matematiksel ifade için oluşturdukları örnek, genelleme ve argüman türlerine yönelik bulgulardan bahsedilmiştir. Daha sonra ise, öğrencilerin önerdiği örnekler ile oluşturdukları genellemeler ve argümanlar arasındaki ilişkilere odaklanılmıştır.

Öğrenciler Tarafından Oluşturulan Örnek ve Genelleme Türleri

Tablo 3, öğrencilerin ilk matematiksel ifade için oluşturdukları örnek ve genelleme türlerini göstermektedir. Tabloda görüldüğü gibi, tüm öğrenciler matematiksel ifade 1 için hem doğrulayan hem de çelişen örnekler bulabilmiş ve ardından ifadenin yanlış olduğu sonucuna varabilmişlerdir. Tüm öğrenciler sunulan ifadenin her zaman doğru olmayacağını fark etmiş ancak, ifadenin ne zaman doğru olduğu hakkında doğru bir genellemede bulunamamışlardır. Öğrencilerin genelleme oluşturma konusunda serbest bırakıldıkları göz önüne alındığında, bir öğrencinin, Reyhan, oluşturduğu örneklerle dayanarak sunulan ifade için hem doğru hem de yanlış süreç genellemesi olarak sınıflandırılan iki genelleme oluşturduğu görülmüştür.

Tablo 3. Matematiksel İfade 1 için Öğrenciler Tarafından Oluşturulan Örnek ve Genelleme Türleri

Doğrulayan Örnekler			Çelişen Örnekler			Doğru Sonuç	Doğru Süreç	Yanlış Süreç
N.Ö.	K.Ö.	G.Ö.	N.Ö.	K.Ö.	G.Ö.	Genellemesi	Genellemesi	Genellemesi
Binnur	Demet	Kemal	Binnur	Demet	Kemal	Demet	Demet	Reyyan
Ceylin	Reyyan	Melike	Ceylin	Reyyan	Melike	Murat	Murat	
		Nilay			Murat	Melike	Melike	
		Murat			Nilay	Nilay	Nilay	
					Reyyan	Reyyan	Reyyan	
					Kemal	Kemal	Kemal	
					Binnur			
					Ceylin			

Not. N.Ö., Naif Örnek, K.Ö., Kritik Örnek ve G.Ö., Geleneksel Örnek için kullanılmıştır

İki öğrenci, Binnur ve Ceylin, matematiksel ifade 1 için hem doğrulayan hem de çelişen örnekler oluşturmuşlardır. Ancak, her iki öğrenci de önerdiği örnekler arasında ortak unsurları kullanarak bir genellemeye ulaşamamışlardır. Bu öğrencilerin önerdiği örneklerin daha çok rastgele seçilmiş örnekler olduğu çalışmanın bir diğer bulgusunu oluşturmuştur. Bu iki öğrenci, çelişen bir örnek oluşturduktan sonra ifadenin yanlış olduğu sonucuna varabilmiş ancak, ifadenin hangi durumlarda doğru olacağı hususunda daha fazla araştırma eğilimi göstermemişlerdir.

Binnur: Birkaç örnek denedim. 1, 2, 3'ü eklediğimde, toplam 6 oluyor. Yani, bu yanlış bir ifade!

Görüşmeci: Başka bir örnek önermeni istesem, bu ne olurdu?

Binnur: Örneğin, 4, 5, 6'yı ekleyebiliriz. Toplam 15 olur. 1, 2, 3'ü eklediğimizde 6 olur, ancak 4, 5, 6'yı eklediğimizde, 15 olur. Ama yine de yanlış.

Yukarıdaki alıntıda görüldüğü gibi, Binnur'un geçerli çelişen ve doğrulayan örnekler önerebildiği görülmüştür. Ancak Binnur, bu örneklerdeki ortak unsurları daha fazla araştırma isteği göstermemiştir. Bunun yerine, rastgele seçilmiş olan 1, 2, 3 örneklerini oluşturmuş ve çelişen örneklerle karşılaştıktan hemen sonra "... Yani, bu yanlış bir ifadedir!" ifadesinden anlaşılabileceği üzere sunulan matematiksel ifadenin yanlış olduğunu belirtmiştir. Örnekler arasındaki ortak unsurları araştırmamak veya örnekleri stratejik olarak seçmemek, Binnur'un önerdiği örneklerin naif örnek olarak kodlanma nedenlerini oluşturmuştur. Ceylin de benzer bir davranış sergilemiştir.

Murat da sunulan matematiksel ifadenin doğruluğunu/yanlışlığını araştırmak için aynı örnekleri önermiştir— 1, 2, 3. Ancak, önerdiği bu örnekleri matematiksel ifade için fark ettiği süreç genellemesini açıklamak amacıyla kullanmıştır. "... Üç ardışık sayı olacak. Bu durumda, ya çift-tek-çift ya da tek-çift-tek. Tek-çift-tek yaparsak, iki tek sayı ekleriz ki bu da toplamı çift sayı yapar. Sonra, çift sayıya çift sayı ekleriz. Diyelim ki bu sayılar 1, 2, 3 olsun. 1'i 3'e eklersek 4 olur ve sonra toplama 2 eklersek 6 olur ki bu da çift sayı olur. Bu yüzden yanlış diyorum!" ifadesinde görüldüğü gibi, Murat daha genel bir fikri tanımlamak için örnekleri bir araç olarak kullanmıştır. "... Diyelim ki bu sayılar 1, 2, 3. 1'i 3'e eklersek 4 eder, sonra toplama 2 eklersek 6 olur" şeklindeki ifadesi, Murat'ın genel fikri (Tek-çift-tek yaparsak iki tek sayıyı ekleriz, bu da toplamı çift sayı yapar) önce fark ettiğini, sonra bu özel örnekleri kullanarak ve bu örnekleri belirli bir sıraya göre toplayarak (1'i 3'e eklersek 4 olur ve sonra toplama 2 eklersek 6 olur) oluşturduğu genel fikri aydınlatmaya çalıştığını göstermektedir. Murat, yalnızca doğrulayan ve çelişen örnekler önermekle kalmamış, aynı zamanda karşıt örnek kümeleri oluşturmanın bir yolunu da göstermiştir (tek-çift-tek sayılar kümesi). Dolayısıyla, Murat'ın matematiksel ifade 1 için oluşturduğu örnekler, geleneksel örnekler olarak sınıflandırılmıştır.

Demet: Yanlış olduğunu düşünüyorum çünkü, 0,1,2 ardışık sayılar ama hayır, olmadı! Toplamı 3 ve tek sayı. 1, 2, 3 de ardışık sayılar ama bu üç sayının toplamı 6. Tek sayı değil. 6 çift sayı. [İfade] Toplamın tek sayı olduğunu söylüyor. Bu yüzden yanlış dedim!

Görüşmeci: Neden bu örnekleri seçtin?

Demet: Baştan başlamak istedim. Bu yüzden 0 ile başladım.

Yukarıdaki görüşme kesitinde görüldüğü gibi Demet, ifadenin baştan yanlış olduğunu düşünmüş ve çelişen bir örnek olacağını düşündüğü bir örnekle—0,1,2— bu düşüncesini kanıtlamaya çalışmıştır. Ancak, Demet: "Bunun yanlış olduğunu düşünüyorum çünkü 0, 1, 2 ardışık sayılardır ama hayır, böyle bir şey olmadı! Toplamı 3 ve tek bir sayıdır" söyleminden anlaşıldığı gibi önerdiği örnek doğrulayan bir örnek olarak hizmet ettiğinde bilişsel bir çatışmayla karşılaşmıştır. Bilişsel çatışmayı başka bir örnek —1, 2, 3— önererek gidermeye çalışan Demet, ifadenin yanlış olduğu sonucuna varmıştır. Demet, 0, 1, 2'yi seçmesinin nedeninin bilerek 0 rakamıyla başlamak istemesi olduğunu belirtmiştir. Bu yüzden, Demet'in önerdiği örnekler kritik örnek olarak sınıflandırılmıştır. Örnekleri bir stratejiye dayanarak seçen diğer öğrenci ise Reyryan'dır.

Reyryan: Zihnimde ardışık sayılardan bazılarını denedim ve sonuç çoğunlukla tek sayı çıktı. Ama 5,6,7'yi denedim ve toplam 18 oldu. 18 çift sayıdır, bu yüzden yanlıştır!

Görüşmeci: Neden bu sayıları seçtin, açıklar mısın?

Reyryan: Ben her zaman 10'a kadar olan sayıları yapmaya çalışırım. Çünkü sayılar her zaman 10 sayısına göre devam edecek. Daha sonra 11,12,13 olarak devam edecek. Yani 10'a kadar olan sayıları denersek, aynı şekilde devam edecektir.

Reyryan, bir sayının son rakamının her zaman 0 ile 9 arasında olacağından, 10'a kadar olan üç ardışık sayının toplamını kontrol etmenin yeterli olacağını ileri sürmüştür. Aynı örüntünün daha büyük sayılar için de devam edeceğini savunmuştur. Reyryan'ın 10'a kadar olan sayıları kontrol etme stratejisi, görüşme esnasında sunulan matematik ifadenin doğruluğuna/yanlışlığına karar vermek için kullandığı örnekleri belirleme stratejisini oluşturmuştur (kritik örnek). Daha sonra iki tek sayının toplamının neden çift sayı olduğu sorulduğunda, Reyryan: "Mesela, 1 ve 3, 4 eder. 3 ve 5, 8'i veya 5 ve 7, 12'i eder. Bu şekilde devam edecektir. Daha büyük sayılarda son rakama bakarız. Son rakam her zaman 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 veya 0 olacaktır. İki tek sayı her zaman çift sayı oluşturmalıdır" söyleminde bulunmuştur. Reyryan tarafından oluşturulan son rakam genellemesi, iki tek sayıyı toplamı ve/veya tek ve çift sayıları belirlerken geçerli bir strateji oluşturmaktadır. Ancak Reyryan, önerdiği bu strateji ile sunulan ifade [Matematiksel İfade 1] arasında yapısal bir ilişki kuramamıştır. Bunun yerine, bu genellemenin neden ve nasıl uygulanabilir olduğunu açıkça belirtmeden, son rakamların her sayıda aynı olacağı genellemesini yapmıştır. Dahası, son rakam stratejisi, üç ardışık sayının toplamının tek mi yoksa çift sayı mı olacağını belirlemek için uygulanabilir bir strateji oluşturmamaktadır. Aslında Reyryan, matematiksel ifade 1 için stratejisini sayıların son rakamları üzerine kurmak yerine, ardışık sayılardaki çift ve tek sayıların durumuna göre temellendirmelidir. Bu nedenle, Reyryan'ın oluşturduğu son rakam genellemesi yanlış süreç genellemesi olarak kodlanmıştır. Daha sonra, Reyryan: "Daha fazla tek sayı varsa, sonuç çift sayı olarak çıkar veya tam tersi." ifadesinde de açıkça görüldüğü gibi önerdiği örnekler arasındaki yapısal ilişkileri daha fazla analiz ederek, doğru süreç genellemesi olarak kodlanan bir genellemeye ulaşabilmiştir.

Katılımcı öğrencilerin görüşmeler esnasında sunulan ikinci matematiksel ifadenin her zaman doğru olup olmayacağına karar vermekte zorlandıkları görülmüştür. Matematiksel ifade 2 için sunulan yanıtlarla ilgili bulgular kümülatif olarak Tablo 4'te sunulmuştur.

Tablo 4. Matematiksel İfade 2 için Öğrenciler Tarafından Oluşturulan Örnek ve Genelleme Türleri

Doğrulayan Örnekler			Çelişen Örnekler			Doğru Sonuç Genellemesi	Doğru Süreç Genellemesi	Yanlış Süreç Genellemesi
N.Ö.	K.Ö.	G.Ö.	N.Ö.	K.Ö.	G.Ö.			
Demet	Melike	Kemal	Binnur	Demet	-	Kemal	Kemal	Kemal
Binnur	Murat		Nilay	Kemal		Melike		Melike
Nilay			Reyryan	Melike		Nilay		Nilay
Ceylin				Ceylin		Ceylin		Ceylin
Reyryan				Murat		Reyryan		Reyryan
						Binnur		
						Demet		
						Murat		

Çoğu öğrenci, görüşmeler esnasında sunulan ikinci ifadenin ne zaman doğru olacağını belirlemede zorluk çekmiş ve oluşturdukları örnekler arasında ortak unsurları doğru bir şekilde belirleyememişlerdir. Bu durum, Tablo 4'te görüldüğü gibi öğrencilerin yanlış süreç genellemesi oluşturmalarına yol açmıştır.

Ceylin: Bunun [ifadenin] yanlış olduğunu göstermek için bir basit ve bir bileşik kesir seçtim. Aynı paydada bir basit ve bir bileşik kesir seçtim. Örneğin, bu kesirlerin $2/5$ ve $7/5$ olduğunu varsayalım. $2/5$ 'te pay ve payda arasındaki fark 3'tür ve $7/5$ 'te fark 2'dir. Bu durumda daha küçük fark $7/5$ 'tedir ve bu kesir daha büyüktür. Bu, ifadeyi destekliyor! Ancak bunu [ifadeyi] desteklemeyen bir durum bulmak istiyorum. $2/1$ ya da $2/3$ ve $9/3$ olsun, bunları deneyelim. $2/3$ 'te pay ve payda arasındaki fark 1, $9/3$ 'te ise 6'dır. Yani, daha küçük fark $2/3$ 'tedir ancak $9/3$, $2/3$ 'ten büyüktür. Şimdi bu örnek bu ifadeyi yanlış yapar. Bu yüzden, ifadenin her zaman doğru olmadığını düşünüyorum.

Ceylin, aynı paydadaki bir basit ve bir bileşik kesri karşılaştırma durumlarında ifadenin yanlış olduğunu savunmuştur. Bilişsel bir çatışmaya neden olan çelişen bir örnekle ($2/5$ ve $7/5$ kesirleri) karşılaştığında Ceylin'in, örneği göz ardı ettiği ve bunun yerine iddiasını (bir basit ve bir bileşik kesir için ifade yanlıştır) doğrulayan bir örnek bulmaya çalıştığı görülmüştür. Diğer öğrenciler de ifadenin bileşik kesirler için yanlış olacağını savunarak yanlış bir genelleme yapma eğilimi gösterdikleri görülmüştür. Örneğin, Melike: "İfade basit kesirleri karşılaştırmak için doğru, ancak kesirler bileşik kesirler olursa tam tersi olur" söylemi ile matematiksel ifade 2'nin tüm bileşik kesirler için yanlış olduğu genellemesinde bulunmuştur.

Öte yandan Kemal, ifadenin hangi durumlarda doğru/yanlış olduğunu doğru bir şekilde inceleyen tek öğrenci olmuştur. "Bu [ifade] basit kesirler için doğru veya yanlış olabilir. Ancak karşılaştırdığımız iki kesrin paydası aynıysa ve ikisi de basit kesirse, ifade doğru olur. Diyelim ki $2/10$ ve diğeri $9/10$ olsun. Aynı paydadaki kesirler için her zaman doğru olur. Bunun nedeni, pay ile payda arasındaki farkın daha küçük olmasıdır. O zaman, kesir bütüne yakın olur ve bu da kesrin daha büyük olacağı anlamına gelir" ifadesinde de anlaşılabileceği üzere Kemal, matematiksel ifade 2 için doğru bir süreç genellemesinde bulunmuştur.

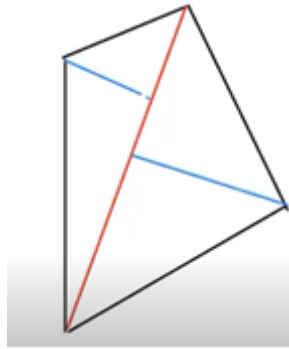
Matematiksel ifade 3 için sunulan yanıtlarla ilgili bulgular toplu olarak Tablo 5'te sunulmuştur. Tüm öğrencilerin matematiksel ifade 3 için ifadeyi çelişen veya doğrulayan örnekler önerdiği görülmüştür. Ancak, tüm öğrencilerin önerdikleri örnekler arasındaki yapısal ilişkileri başarılı bir şekilde belirleyemediği çalışmanın bulguları arasında yer almıştır. Katılımcılar sunulan matematiksel ifade 3 ile çelişen bir örnekle karşılaştıktan sonra ifadenin her zaman doğru olmadığı sonucuna varmalarına rağmen, ifadenin ne zaman doğru veya yanlış olacağını belirlemede başarısız oldukları görülmüştür.

Tablo 5. Matematiksel İfade 3 için Öğrenciler Tarafından Oluşturulan Örnek ve Genelleme Türleri

Doğrulayan Örnek			Çelişen Örnek			Doğru Sonuç	Doğru Süreç	Yanlış Süreç
N.Ö.	K.Ö.	G.Ö.	N.Ö.	K.Ö.	G.Ö.	Genellemesi	Genellemesi	Genellemesi
Demet	Nilay	Kemal	Demet	Nilay	Kemal	Kemal	Kemal	Demet
Binnur		Melike	Binnur		Melike	Melike	Melike	Nilay
Ceylin		Murat	Ceylin		Murat	Nilay	Murat	
Reyyan			Reyyan			Reyyan		
						Ceylin		
						Binnur		
						Demet		
						Murat		

Sonuç olarak, öğrencilerin çoğu matematiksel ifade 3'ün doğru olacağı durumlar arasındaki yapısal örüntüyü belirlemede başarısız olmuştur. Örneğin, iki öğrenci—Demet ve Nilay— ifade 3 için hatalı bir genellemede bulunmuşlardır. Nilay: "Bu doğru değil! Bir kare ve bir dikdörtgen için doğru, ancak bir yamuk için doğru değil... Bunun [ifadenin] tüm kenarları eşit, karşılıklı kenarları eşit ve hiçbir kenarı eşit olmayan bir dörtgen için doğru olup olmadığını görmek istedim... Bu ifadenin doğru olup olmadığı dörtgenlerin kenar uzunluklarına bağlıdır. Karşılık gelen kenarlar birbirleriyle orantılıysa, o zaman doğrudur!" söyleminde bulunmuştur. Nilay ifadenin doğruluğunu araştırırken stratejik olarak düşündüğü örnekleri (kritik örnek) seçmiştir ve dörtgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları birbirleriyle orantılı olması durumunda ifadenin doğru olacağını savunmuştur. Nilayın bu genellemesi yanlış süreç genellemesi olarak sınıflandırılmıştır. Bir yamukta bir köşegenin oluşturduğu iki üçgenin alanlarının neden farklı olacağı sorulduğunda Nilay: "Açıları farklıdır [üçgenlerin karşılıklı iç açılarını işaret ederek] ve kenarları orantılı değildir" diye cevap vermiştir. Nilayın bu söyleminden anlaşıldığı üzere, Nilayın benzerlik durumlarını ifadenin belirleyici bir koşulu olarak gördüğü anlaşılmıştır. Nilayın aksine Kemal, aynı alana sahip üçgenleri elde etmede üçgen eşliğini ve üçgenlerin alan formülünü göz önünde bulundurmıştır.

Kemal: Bir dörtgenin en azından bir köşegeni onu düzgün dörtgenlerde aynı alana sahip iki üçgene bölebilir. Ama burada düzgün dörtgen yazmıyor. Örneğin, az önce çizdiğim şekil düzgün bir dörtgen değil ve [köşegen] alanı ikiye bölmüyor. Bir üçgenin alanı taban çarpı yüksekliğin yarısıdır. Üçgenlerin tabanları [Şekil 2'deki köşegenle oluşturulan üçgenlere atıfta bulunularak] burada köşegendir, ancak yükseklikler farklıdır. Dolayısıyla, üçgenlerin alanları da farklıdır.



Şekil 2. Matematiksel ifade 3 için Kemal tarafından oluşturulan çelişen örnek temsili

Kemal, düzgün dörtgenlerle neyi kastettiğini şöyle açıklamıştır: "... Bu dörtgenlerde [düzgün dörtgenlerde] üçgenler aynıdır, kenarları aynıdır, alanları da aynıdır." Kemal, köşegenlerin dörtgeni iki eş üçgene böldüğü dörtgenlere, dikdörtgen, kare veya paralelkenar gibi, düzgün dörtgen adını vermiştir. Daha sonra, düzgün dörtgen olarak adlandırdığı dörtgenin bir köşegeninin oluşturduğu üçgenlerin alanlarının, köşegen tarafından oluşturulan üçgenler eş olduğu takdirde aynı olması gerektiğini genellemiştir. Her ne kadar düzgün dörtgen tanımı hatalı olsa da Kemal'in üçgen eşliğine dayanarak yaptığı bu genelleme doğru olarak sınıflandırılmıştır.

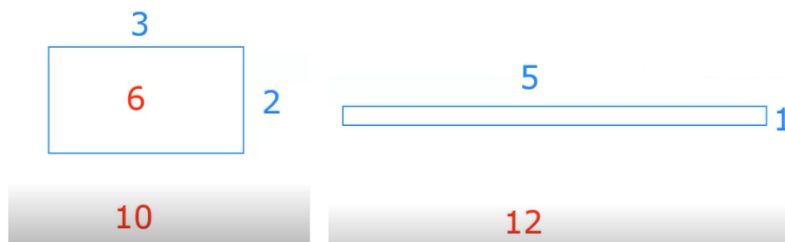
Tablo 6'da görüldüğü gibi, katılımcıların çoğunun sunulan matematiksel ifadenin doğru olup olmadığını belirlemede zorlandığı görülmüştür. Bir dikdörtgenin çevresi ile alanı arasında her zaman sabit bir ilişkinin olmayacağı sonucuna doğru bir şekilde varabilen öğrenciler sadece Kemal, Melike ve Binnur olmuştur.

Tablo 6. Matematiksel İfade 4 için Öğrenciler Tarafından Oluşturulan Örnek ve Genelleme Türleri

Doğrulayan Örnek			Çelişen Örnek			Doğru Sonuç	Yanlış Sonuç	Doğru Süreç	Yanlış Süreç
N.Ö.	K.Ö.	G.Ö.	N.Ö.	K.Ö.	G.Ö.	Genellemesi	Genellemesi	Genellemesi	Genellemesi
Demet	-	Kemal	-	Melike	Kemal	Kemal	Demet	Kemal	Demet
Nilay						Melike	Nilay	Binnur	Nilay
Ceylin						Binnur	Ceylin		Ceylin
Murat							Murat		Reyyan
Reyyan							Reyyan		
Melike									
Binnur									

Bu üç öğrenci arasında Kemal ve Binnur'un, ifadenin ne zaman yanlış olacağına ilişkin doğru bir genelleme yapabildiği görülmüştür. Binnur: "Bir dikdörtgenin her iki kenar uzunluğu artarsa alanı da artar. Ancak dikdörtgenin bir kenar uzunluğu azalır, o zaman ifade yanlış olabilir, yani sonuç olarak alanı azalabilir" ifadesi ile matematiksel ifade 4'ün hangi durumlarda yanlış olacağına yönelik doğru bir genellemede bulunmuştur. Binnur iddiasında haklı olmasına rağmen, iddiası durumlar arasındaki biçimsel analizden uzak tamamen sezgisine dayalı oluşturulmuştur. Binnur: "Kenar uzunluğu 10 cm ve genişliği 5 cm olan bir dikdörtgen olsun. Uzunluğu 2 cm azaltırsak ya da 7 cm azalacağını düşünürsek, bu kenarın uzunluğu 3 cm olacak. Genişliği artacak ve 7 cm olsun. Böylece alanı değişecek" diyerek çelişkili bir örnek oluşturmaya çalışmıştır. Ancak, Binnur'un önerdiği bu örnek matematiksel ifadeyi çürütmek yerine ifadeyi doğrulayıcı bir örnek görevi görmüştür. Bunun üzerine, Binnur ne sunduğu örneği matematiksel olarak analiz etmeye çalışmış ne de bu örnek yerine ifade ile çelişen yeni bir örnek önermeye uğraşmıştır. Aksine, Binnur sezgisine dayalı olarak oluşturduğu bu genellenenin doğru olduğu konusunda şüphe etmemiştir.

Kemal: "... yanlıştır. Mesele şu ki, iki dikdörtgende bir kenar uzunluğu aynı olduğunda, dikdörtgenin diğer kenar uzunluğu, çevreyi artırmak için ölçü olarak artırılmalıdır. Bu durumda, bu [ifade] doğrudur. Ancak kenarlardan birini azaltırsak, bu her zaman doğru olmayabilir. Yani, örneğin, bir dikdörtgenin kenarlarının 3 ve 2 olduğunu varsayalım. Bir kenarı artırır ve 5 yaparsam ve diğer kenarı azaltırsam, 1 yaparsam, çevre artar, ancak alan azalır" ifadesi ile doğru bir süreç genellemesi oluşturmuş ve oluşturduğu bu genellemeyi açıklamak amacıyla ifadenin yanlış olduğu bir durumu örneklendirmiştir.

**Şekil 3.** Matematiksel ifade 4 için Kemal'in oluşturduğu çelişen örnek temsili

Çalışmaya katılan çoğu öğrenci, alan ve çevre arasında sabit bir ilişki olduğunu savunmuş ve bu durum, öğrencilerin matematiksel ifade 4 için yanlış bir genelleme yapmalarına yol açmıştır. Örneğin, Nilay: "Bir dikdörtgenin çevresi, dört kenarın toplamıdır. Bu durumda, çevre arttığında kenar uzunlukları da artmalıdır. Bir dikdörtgenin iki kenar uzunluğunun çarpımı bize dikdörtgenin alanını verir. Kenar uzunlukları arttığı için alan da artar" söylemi ile alan ve çevre arasında sabit bir ilişki olduğunu savunmuştur. Nilay, diğer öğrenciler gibi, Stavy ve Tirosh'un (1996) "Daha Çok A - Daha Çok B" olarak adlandırdığı sezgisel kurala dayanarak oluşturduğu yanlış genellemesini gerekçelendirmiştir. Bu genelleme, bir dikdörtgenin her iki veya yalnızca bir çift karşı kenarının artırılması durumu için doğru olabilir, ancak her zaman doğru değildir (bkz. Şekil 3).

Öğrenciler Tarafından Oluşturulan Argüman Türleri

Öğrenciler tarafından oluşturulan tüm argüman türleri kümülatif olarak Tablo 7’de sunulmuştur. Tabloda görülebileceği gibi, öğrenciler genellemelerini kanıtlamak için argüman oluşturmakta zorlanmışlardır. Öğrenciler genellikle ya hiç argüman oluşturmamış ya da genel geleneksel bir matematiksel argüman olarak değerlendirilemeyen argümanlar oluşturmuşlardır.

Tablo 7. Öğrenciler Tarafından Oluşturulan Argüman Türleri

	Argüman Yok	Yanlış Argüman	Empirik Argüman	Empirik Olmayan Argüman	Geleneksel Argüman
M.İ.1	Melike Binnur Nilay Ceylin		Demet Reyyan	Murat Kemal	
M.İ.2	Melike Binnur Ceylin Nilay Demet Murat Reyyan				Kemal
M.İ.3	Ceylin	Nilay	Demet Binnur Reyyan	Murat	Kemal Melike
M.İ.4	Binnur	Demet Nilay Ceylin Reyyan Murat	Melike		Kemal

Not. M.İ. Matematiksel İfade için kullanılmıştır.

Matematiksel ifade 3 için Demet, ifadenin her dörtgen için her zaman doğru olmayacağı sonucuna varmış ve geçerli bir çelişen örnek oluşturabilmiştir (bkz. Şekil 4). Ancak, Demet çizdiği bu dörtgendeki köşegenlerin dörtgeni aynı alana sahip iki üçgene neden ayırmayacağını açıklamakta ve geçerli bir kanıt oluşturmakta zorlanmıştır.



Şekil 4. Matematiksel ifade 3 için Demet'in oluşturduğu çelişen örnek temsili

Demet: Örneğin, üçgenlerin kenar uzunluklarını kontrol edebiliriz. Yalnızca kenar uzunluklarını ölçersek veya kenar uzunluklarını bilirsek emin olabiliriz. Bu şekildeki üçgenler [Şekil 4'teki dörtgene atıfta bulunarak] farklı görünecektir, biri daha küçük diğeri daha büyük görünecektir. Şu anda herhangi bir ölçüm sonucu olmadan emin olamayız.

Demet, üçgenlerin kenar uzunlukları bilinmeden alanların aynı olup olmadığını bulamayacağını savunmuştur. Demet'in genellemesini gerekçelendirmek için ölçüm sonuçlarına (yani kenar uzunluklarına) güvenme eğilimi empirik argüman olarak sınıflandırılmıştır. Öte yandan Melike, matematiksel ifade için oluşturduğu genellemesini gerekçelendirmek için üçgenin alan

formülüne dayalı bir argüman geliştirmiştir ve bu argüman geleneksel argüman olarak sınıflandırılmıştır.

Melike: Bu ifade düzgün dörtgenler için doğru olurdu ancak, düzgün olmayan dörtgenler için yanlış olur. Düzgün bir dörtgende bir köşegen dörtgeni iki eş üçgene böler. Ancak düzgün olmayan dörtgenlerde bu doğru olmayabilir. Örneğin, genel bir dörtgeni şu şekilde çizebilirim (Şekil 5). Burada kenarlar ve açılar farklı olur. Bu dörtgen için ifade doğru olmaz.



Şekil 5. Matematiksel ifade 3 için Melike'nin oluşturduğu çelişen örnek temsili

Görüşmeci: Bunu nasıl kanıtlarsın?

Melike: Bu üçgenlerin yükseklikleri farklı ama tabanları aynı, köşegenleri. Dolayısıyla bu durumda üçgenlerin alanları farklı olur.

Öğrencilerin oluşturdukları örnek ve genelleme türleri ile geliştirdikleri argümanlar arasında olası bir ilişkinin olup olmadığı gelecek bölümde irdelenecektir.

Örnek Türleri ile Öğrencilerin Oluşturduğu Genelleme ve Argüman Türleri Arasındaki İlişki

Bu çalışmanın sonuçları, öğrencilerin sunulan matematiksel ifadelerin çoğu için çelişen örnekler önermede ve bu örneklerin sonuçlarındaki aynılığın genellemesine ulaşmada (sonuç genellemesi) başarılı olduklarını göstermiştir. Ancak, öğrencilerin süreç genellemelerine ulaşmada ve matematiksel argümanlar oluşturmada o kadar başarılı olmadıkları görülmüştür (bkz. Tablo 3, 4, 5, 6 ve 7). Öğrencilerin bireysel görüşmelerde sunulan ifadelerin doğruluğunu/yanlışlığını araştırmak için oluşturdukları örnek türleri ile oluşturulan genelleme ve argüman türleri arasında bir ilişkinin olduğu öngörüsünde bulunulmuştur. Bu çalışmanın bulguları, kritik ve geleneksel örnekler olarak kodlanan örnek türlerini öneren öğrencilerin, süreç genellemeleri üretmede ve empirik olmayan veya geleneksel argümanlar oluşturmada daha başarılı olduklarını göstererek bu öngörüye desteklemektedir. Benzer olarak, rastgele seçilen örnekler oluşturan öğrencilerin (naif örnekler) önerdikleri bu örnekler arasındaki yapısal ilişkileri belirlemede ve bu ilişkileri kullanarak argümanlar oluşturmada zorluk çektikleri görülmüştür. Örnek türleri ile öğrencilerin oluşturdukları genellemeler ve/veya argümanlar arasındaki ilişkiyi daha iyi açıklayabilmek için Binnur ve Kemal özel durumları bu bölümde daha ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

Tablo 8. Binnur Tarafından Oluşturulan Örnek, Genelleme, Argüman Türleri

	Destekleyen Örnekler	Çelişen Örnekler	Sonuç Genellemesi	Süreç Genellemesi	Argüman Türleri
M.İ.1	N.Ö.	N.Ö.	Doğru	-	Argüman yok
M.İ.2	N.Ö.	N.Ö.	Doğru	-	Argüman yok
M.İ.3	N.Ö.	N.Ö.	Doğru	-	Argüman yok
M.İ.4	N.Ö.	N.Ö.	Doğru	Doğru	Argüman yok

Tablo 8, Binnur'un matematiksel ifadeler için naif örnekler olarak kodlanmış örnekler önerdiğini göstermektedir. Tablo 8 ayrıca Binnur'un doğru sonuç genellemeleri oluşturmada başarılı olurken, son matematiksel ifade dışında süreç genellemesi oluşturmada başarılı olmadığını kanıtlar niteliktedir. Binnur'un, görüşmeler esnasında sunulan matematiksel ifadeler için oluşturduğu örneklerle bakarak ve bu örnekler arasındaki sonuçların aynılığını belirleyerek genelleme oluşturma sürecinde

başarılı olduğu görülmüştür. Ancak, Binnur oluşturduğu örneklerin özelliklerine odaklanarak bir genelleme yapma konusunda aynı başarıyı gösterememiştir. Tablo 8'de görüldüğü gibi Binnur'un, görüşme esnasında oluşturduğu genellemeleri gerekçelendirmek amacıyla argüman oluşturamadığı dikkat çekmektedir.

Tablo 9. Kemal Tarafından Oluşturulan Örnek, Genelleme, Argüman Türleri

	Destekleyen Örnekler	Çelişen Örnekler	Sonuç Genellemesi	Süreç Genellemesi	Argüman Türleri
M.İ.1	G.Ö.	G.Ö.	Doğru	Doğru	Empirik olmayan
M.İ.2	G.Ö.	K.Ö.	Doğru	Doğru + Yanlış	Geleneksel
M.İ.3	G.Ö.	G.Ö.	Doğru	Doğru	Geleneksel
M.İ.4	G.Ö.	G.Ö.	Doğru	Doğru	Geleneksel

Kemal ise, çoğunlukla bireysel görüşmelerde sunulan matematiksel ifadeler için geleneksel örnekler önermiş ve süreç genellemelerine ulaşmada ve geleneksel argümanlar olarak kodlanmış argümanlar oluşturmada daha başarılı olmuştur. Öğrencilere yönelik tüm bu bulgular, gelecek bölümde güncel literatür ışığında tartışılmıştır.

Tartışma

Bu çalışmada matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin doğrulayan ve çelişen örnekler oluşturabilecekleri matematiksel ifadelerle karşılaştıklarındaki akıl yürütme süreçlerinin araştırılması amaçlanmıştır. Hem doğrulayan hem de çelişen örneklerin önerilebileceği ifadelerin, karşıt bir örnek önermenin ötesine geçen öğrenci davranışlarını incelemek için verimli bir zemin oluşturabileceği düşünülmüştür. Bu nedenle bu çalışmanın amacı iki yönlüdür: (1) öğrencilerin hem doğrulayan hem de çelişen örneklerin önerilebileceği matematiksel ifadelerin doğruluğunu/yanlışlığını incelerken oluşturduğu örneklerin, genellemelerin ve gerekçelerin türlerini analiz etmek ve (2) öğrencilerin önerdiği örnek türleri ile oluşturdukları genellemeler ve argümanlar arasındaki ilişkiyi araştırmak.

Araştırmacılar her zaman doğru olmayan matematiksel ifadelerin, öğrencilerin empirik argümanların geçerli bir kanıtlama yöntemi olarak sınırlılıklarının farkına varmasında önemli bir araç görevi üstlenebileceğini önermektedirler (Ball vd., 2002). Bu çalışma, bu tür matematiksel ifadelerin aynı zamanda öğrencilerin çeşitli örnekler oluşturmaya, örnekler arasındaki yapısal ilişkileri araştırmasına ve genellemeler ile argümanlar inşa etmesine yardımcı olabileceğini göstermiştir. Hem doğrulayan hem de çelişen örneklerin bulunduğu matematiksel ifadeler, katılımcı öğrencilerin çeşitli örnekler oluşturmaya, çeşitli genellemelerde bulunması ve argümanlar oluşturmaya için verimli bir araç görevi üstlenmiştir (bkz. Tablo 3, 4, 5, 6 ve 7). Bu nedenle bu tür ifadelerin, öğrencilerin matematiksel varsayımlar oluşturmaları, bu varsayımları değerlendirmeleri ve varsayımlarını doğrulamak veya çürütmek için çeşitli akıl yürütme yöntemleri kullanmalarına yönelik yapılan çağrılar (CCSSM, 2010; NCTM, 2000) matematik sınıflarına aktarılmasında etkili bir araç görevi üstlenebileceğine inanılmaktadır. Pek çok araştırmacı öğrencilerin matematiksel varsayımlar oluşturduğu, değerlendirdiği, geliştirdiği ve bu varsayımları kanıtladığı veya çürüttüğü sınıf ortamlarını, matematiksel olarak yetenekli öğrencilerin entelektüel ihtiyaçlarını karşılamak için gerekli zengin öğrenme fırsatları olarak savunmaktadırlar (Berg ve McDonald, 2018; Leikin, 2021; Sriraman, 2004). Bu çalışmada kullanılan matematiksel ifadelerin farklı bir öğrenci grubuna uygulanması durumunda bulguların farklı olacağı düşünülebilir. Bu tür endişelerin önemli bir noktaya dayandığı kabul edilse de, bu çalışmanın sonuçlarını tüm öğrencilere genellenmek gibi bir amacı olmadığını belirtmek gerekir. Yine de bu tür matematiksel görevlerin, tüm öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerilerini geliştirmeleri için zengin bir öğrenme fırsatı sunabileceğine inanılmaktadır.

Karşıt örnekleri kavramsal değişimi sağlamak için bilişsel çatışma yaratma amacıyla bir öğretim aracı olarak kullanma, araştırmacılar ve eğitimciler arasında yaygın olarak benimsenmiştir (Gal, 2019; Zaskis ve Chernoff, 2008). Zaskis ve Chernoff (2008) farklı türdeki karşıt örneklerin, bilişsel çatışma yaratma ve bu bilişsel çatışma ile başa çıkma gücünde değişkenlik gösterebileceğini belirtmişlerdir. Bu çalışma çelişen bir örnekle karşılaşmanın her zaman bilişsel bir çatışma yaratmadığını veya öğrenciler için kavramsal bir değişim sağlamadığını belgelemektedir. Örneğin Ceylin matematiksel ifade 2'ye ilişkin yaptığı genellemede çelişkili bir örnekle karşılaşmıştır: “Bu [önerdiği örnekler] ifadeyi destekliyor! Ama ben bunun [ifadeyi] desteklemediği bir durum bulmak istedim. $2/1$ olsun, ya da $2/3$ ve $9/3$, bunları deneyelim!” Ceylin'in ifadesinde de görüldüğü gibi, çelişen örnekler olarak önerdiği örnekler, aslında sunulan matematiksel ifadeyi doğrulamıştır. Ancak Ceylin, orijinal iddiasını terk etmek veya değiştirmek yerine, ifadeyi çürüten başka örnekler bulmaya çalışmıştır. Benzer şekilde, Binnur da “...eğer bir kenar kısalsaydı, o zaman ifade yanlış olabilir, yani alan azalabilir” ifadesindeki genellemeyi doğrulamak için bir örnek önermeye çalışmış ancak, önerdiği örnek iddiası ile çalışmıştır: “Diyelim ki uzunluk 10 cm ve genişlik 5 cm. Uzunluğu 2 cm veya 7 cm azaltırsak, o zaman uzunluk 3 cm olacak, genişlik artacak ve 7 cm olacak ve alanı değişecek”. Ceylin ve Binnur'un önerdiği örneklerin beklenmedik sonuçlarıyla ortaya çıkan bilişsel çatışma, başlangıçtaki iddiadan matematiksel olarak daha sağlam bir iddiaya geçiş sağlamamıştır (Zaskis ve Chernoff, 2008). Ceylin ve Binnur'un bu çalışmada sunulan matematiksel ifadeler için önerdiği örnek türlerine bakıldığında, çoğu zaman rastgele seçilmiş örnekler önerdikleri görülmektedir (naif örnek). Gal (2019), bilişsel bir çatışmayla yüzleşmemek veya çatışmayı eğitimcilerin öngördüğü şekilde çözmemenin altında yatan nedenler olarak formal akıl yürütmede yaşanan zorlanmalar veya verilerin kavramsal olarak anlaşılabilmesi gibi çeşitli parametrelere işaret etmiştir (s. 241). Katılımcı öğrencilerin örnek kullanımları daha derinlemesine analiz edildiğinde, öğrencilerin örnek önerme ve bilişsel çatışmayı çözme davranışlarının benzer olduğu görülmüştür. Hem Ceylin hem de Binnur, önerdikleri örnekler önerme amaçları ile çalıştığında bu örnekleri göz ardı etme eğiliminde bulunmuşlardır. Başka bir deyişle, önerdikleri örneklerin beklenmedik sonuçlarının altında yatan nedenleri daha fazla analiz etme çabası göstermemişlerdir. Benzer şekilde, matematiksel ifadeleri doğrulamak veya desteklemek için örnek seçerken entelektüel merak eksikliği sergilemişlerdir. Hadamard (1945) ayırt etme veya seçme yeteneğini matematiksel yaratıcılık olarak tanımlamaktadır. Bu tanım dikkate alındığında, örnek seçerken daha titiz davranan katılımcı öğrenciler daha yaratıcı olarak nitelendirilebilir. Bu nedenle matematiksel yaratıcılığın, bilişsel bir çatışmayla karşılaşılması veya bilişsel çatışmanın çözülmesi sürecinde bir parametre olarak rol aldığı düşünülmektedir.

Bu çalışmanın bulguları sezginin, bilişsel çatışma ile karşılaşma veya çözümleme sürecinde ne kadar önemli bir rol oynadığını göstermiştir. Ben-Zeev ve Star (2001), sezgiyi klasik sezgici perspektiften “...cevap hemen kendiliğinden belirgin hale gelir” (s. 5) şeklinde tanımlar. Matematiksel ifade 4 için, beş öğrenci—Demet, Nilay, Ceylin, Reyhan, Murat—bir dikdörtgenin çevresi ile alanı arasında sabit bir ilişki olduğunu “bir dikdörtgenin çevresi artarsa, alanı da artar” ifadesi ile genellemişlerdir. Stavy ve Tirosh (1996), bu sezgisel genellemeyi “Daha A—Daha B” olarak adlandırmıştır. Nilay: “Bir dikdörtgenin iki kenar uzunluğunun çarpımı bize dikdörtgenin alanını verir. Kenar uzunlukları arttıkça, alan da artar” ifadesiyle “Daha A—Daha B” sezgisel kuralına dayanarak önerdiği yanlış süreç genellemesini gerekçelendirme çabasında olduğu çalışmanın bulguları arasında yer almıştır. Bu nedenle sezginin öğrencilerin matematiksel görevleri hatalı genelleme eğilimlerinin bir parametresi olarak değerlendirilebileceği göz önünde bulundurulduğunda, sezginin aynı zamanda argüman oluşturma sürecinde de önemli bir rol oynadığını belirtmek yanlış olmayacaktır. Her ne kadar Yopp (2015) bu tür yanıtları sorunlu olarak değerlendirse de bu çalışmada, yanlış argümanların öğrencilerin matematiksel akıl yürütmelerinin önemli bir yönünü oluşturduğu kabul edilmiştir. Péter-Szarka (2012) benzer bir tema ile yanlış yanıtların öğrencilerin matematiksel akıl yürütme becerilerini gösterdiğini ve bu becerilerin akıl yürütmelerinin önemli bir parçasını oluşturduğunu savunmuştur.

Bu çalışmanın bulguları, farklı örnek türlerinin öğrencilerin genelleme eylemlerinde önemli rollere sahip olduğunu göstermiştir. Bu çalışmadaki öğrenciler, matematiksel ifadeler için genellikle doğru sonuç örüntü genellemeleri oluşturmuşlardır. Yani, öğrenciler çelişkili örneklerle karşılaştıklarında ifadelerin yanlış olduğu sonucuna varabilmişlerdir. Ancak, geleneksel örnekler olarak kodlanan örnekleri oluşturan öğrencilerin, yalnızca sonuç örüntü genellemeleri oluşturmakla kalmadığı, aynı zamanda süreç örüntü genellemeleri de oluşturabildikleri görülmüştür. Yani, matematiksel ifadelerin doğruluğunu kanıtlarken geleneksel örnekler kullanan öğrenciler, ifade koşullarını daha iyi analiz edebilmişlerdir. Örneğin, Kemal, "...Bu [Matematiksel İfade 2] her zaman aynı paydalara sahip kesirler için doğrudur. Sebebi, pay ile payda arasındaki farkın daha küçük olmasıdır. Bu durum kesrin, tama yakın olduğunu ve dolayısıyla daha büyük olacağı anlamına gelir" şeklinde bir genellemede bulunmuştur. Bu çalışmanın bulguları, örnek türlerinin öğrencilerin genelleme eylemleri ve oluşturdukları genelleme türleri açısından bilgilendirici olduğunu göstermiştir. Özellikle geleneksel örnekler olarak kodlanan örnekleri oluşturma sürecinde birçok ilişkilendirmenin devreye girdiği görülmüştür. Böylece öğrencilerin önerdiği örnekler, yalnızca kavramların nasıl anlamlandırıldığını aydınlatmakla kalmamış, aynı zamanda öğrencilerin oluşturduğu genelleme türleri hakkında da önemli bilgiler sunmuştur. Matematiksel "ilişki arama ve kullanma" (CCSSM, 2010, s. 8) çağrısının, öğrencilerin geleneksel örnekler oluşturduğu durumlarda daha belirgin hale geldiği görülmüştür.

Stylianides ve Stylianides (2009), kanıt şemalarının öğrencilerin matematiksel ifadeleri doğrulama için kullandıkları örnek uzaylarının bir yansıması olduğunu öne sürmüştür. Bu çalışmanın bulguları ise, öğrencilerin önerdiği örnek türlerinin, öğrencilerin kanıt şemaları ve oluşturdukları genellemeler açısından bilgilendirici olduğunu göstermiştir. Katılımcı öğrenciler, bireysel görüşmelerde kullanılan tüm matematiksel ifadeler için (son matematiksel ifade hariç) geçerli çelişen örnekler önermişler ve ifadelerin yanlış olduğu sonucuna varabilmişlerdir. Ancak, tüm öğrenciler oluşturdukları örneklerin ortak unsurlarını belirlemede veya bu örnekler arasındaki yapısal ilişkileri tanımlamada aynı derecede başarılı olamamışlardır. Sonuç olarak, çalışmaya katılan öğrencilerin oluşturdukları genellemeleri kanıtlamak için geçerli matematiksel argümanlar oluşturmakta her zaman aynı derecede başarılı olamadığı görülmüştür (bkz. Tablo 7). Örneğin, Ceylin ve Binnur, sunulan matematiksel ifadeleri doğrularken genellikle naif örnekler olarak kodlanan örnekler önermiş ve genellemeleri için argüman oluşturmada daha az başarılı olmuşlardır. Buna karşılık, matematiksel ifadeleri doğrularken çoğunlukla geleneksel örnekler kullanan öğrenciler, empirik olmayan ve geleneksel argümanlar olarak sınıflandırılan argüman oluşturmada daha başarılı olmuşlardır. Matematiksel ispat oluşturma sürecinin oldukça zorlayıcı bir görev olduğu ve argümantasyon bilgisi (Harel ve Sowder, 1998; Stylianides ve Stylianides, 2009) ve matematiksel kayıtlar (Epp, 2003; Mata-Pereira ve da Ponte, 2017) gibi farklı parametrelerden etkilendiği göz önünde bulundurulduğunda, öğrencilerin argüman geliştirme davranışlarıyla ilgili bilgilendirici faktörleri bilmenin önemli olduğu düşünülmektedir.

Öneriler

Bu çalışmanın amacı, matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel bir ifade için hem doğrulayan hem de çelişen örneklerle karşılaştıklarında nasıl akıl yürüttüklerini incelemektir. Çalışmada hem doğrulayan hem de çelişen örneklerin ileri sürülebildiği ifadelerin bilişsel çatışmaya yol açabileceği ve öğrencilerin çeşitli örnekler, genellemeler ve gerekçelendirmeler (karşıt örnek sunmanın ötesine geçen girişimler) ileri sürmelerine yol açan entelektüel meraklarını destekleyebileceği varsayılmıştır. Çalışmanın bulguları bu tür matematiksel ifadelerin, çeşitli örnekler oluşturma, örnekler arasındaki yapısal ilişkileri araştırma ve genellemeler ve argümanlar geliştirme için gerekli olduğunu göstermiştir. Bu çalışma, sekiz matematiksel olarak üstün yetenekli öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Bu durum, bir sınırlılık olarak değerlendirilebilir. Bu nedenle hem doğrulayan hem de çelişen örnekler içeren matematiksel ifadelerin öğrencilerin örnek, genelleme ve gerekçe oluşturma süreçlerini teşvik edip etmediğini görmek için çalışmanın farklı gruplarla (farklı akademik başarıya sahip öğrenciler) ve farklı ortamlarda (küçük grup mülakatları) yinelenmesi önerilebilir.

Bu çalışmanın bulguları katılımcıların karşıt örneklerin neden olduğu bilişsel çatışmayla farklı şekillerde başa çıktıklarını da göstermiştir. Örneğin, Ceylin ve Binnur karşıt örneği görmezden gelirken, Kemal örneklerin ifadeyi neden çelişkiye düşürdüğünü anlamak için daha fazla araştırma yapma eğilimi göstermiştir. Çalışmalar, bilişsel çatışmayı göz ardı etme veya çözmeme nedenleri arasında formal akıl yürütmede yaşanan zorluklar, sezgi eksikliği veya verileri anlama yetersizliğini içeren çeşitli faktörler sıralamışlardır. Bu çalışmanın bulguları, çalışmada kullanılan matematiksel ifadelerin içerdiği kavramların anlaşılmasından kaynaklı zorlukların da öğrencilerin bilişsel çatışmayla başa çıkma süreçlerini etkileyen bir diğer unsuru oluşturabileceğini göstermiştir. Ancak çalışmanın amacı ve çalışmada kullanılan veri kaynakları göz önünde bulundurulduğunda, içerik bilgisinin bilişsel çatışma ile başa çıkma yolları üzerindeki etkilerini araştırma çalışmanın kapsamı dışındadır. Bu nedenle, bu konuyu daha derinlemesine incelemek için yeni çalışmaların planlanması önerilebilir.

Ayrıca, bu çalışmanın bulguları, öğrencilerin önerdiği örnek türlerinin, öğrencilerin kanıt şemaları ve genelleme türleri hakkında bilgilendirici olduğunu göstermiştir. Bu nedenle, öğrencilerin oluşturduğu örnek türlerinin, öğrencilerin kanıt şemalarını teşvik etmek ve analiz etmek için bir öğretim ve/veya araştırma aracı olarak değerlendirilmesi önerilebilir.

Kaynakça

- Akkanat, H. (2004). Üstün veya özel yetenekliler. M. R. Şirin, A. Kulaksızoğlu ve A. E. Bilgili (Ed.), *Seçilmiş makaleler kitabı* içinde (s. 167-193). İstanbul: Çocuk Vakfı.
- Alcock, L. J. (2004). Uses of example objects in proving. M. J. Hoines ve A. B. Fuglestad (Ed.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* içinde (s. 17-24). Bergen, PME 28.
- Alcock, L. ve Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 111-129. doi:10.1007/s10649-008-9149-x
- Alcock, L., ve Weber, K. (2010). Undergraduates' example use in proof construction: Purposes and effectiveness. *Investigations in Mathematics Learning*, 3(1), 1-22. doi:10.1080/24727466.2010.11790
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* içinde (s. 216-235). London: Hodder & Stoughton.
- Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. E. von Glaserfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* içinde (s. 89-110). Hingham, MA: Kluwer.
- Ball, D. L., Hoyle, C., Jahnke, H. N., ve Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* içinde (s. 907-920). Beijing: Higher Education Press.
- Ben-Zeev, T., ve Star, J. (2001). Intuitive mathematics: Theoretical and educational implications. B. Torff ve R. J. Sternberg (Ed.), *Understanding and teaching the intuitive mind: Student and teacher learning* içinde (s. 29-56). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Berg, D. H. ve McDonald, P. A. (2018). Differences in mathematical reasoning between typically achieving and gifted children. *Journal of Cognitive Psychology*, 30(3), 281-291. doi:10.1080/20445911.2018.1457034
- Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. ve Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understandings of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Buchbinder, O., ve Zaslavsky, O. (2009). A framework for understanding the status of examples in establishing the validity of mathematical statements. M. Tzekaki, M. Kaldrimidou ve H. Sakonidis (Ed.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* içinde (s. 225-232). Thessaloniki: Aristotle University of Thessaloniki.
- Budak, I. (2012). Mathematical profiles and problem solving abilities of mathematically promising students. *Educational Research and Reviews*, 7(16), 344-350. doi:10.5897/ERR12.009
- Common Core State Standards for Mathematics. (2010). *Common core state standards mathematics*. VA: Author.
- Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen ve J. Dormolen (Ed.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* içinde (s. 61-85). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Ellis, A. B., Ozgur, Z., Vinsonhaler, R., Dogan, M. F., Carolan, T., Lockwood, E. ... Zaslavsky, O. (2019). Student thinking with examples: the criteria-affordances-purposes strategies framework. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 263-283. doi:10.1016/j.jmathb.2017.06.003
- English, L., ve Warren, E. (1995). General reasoning processes and elementary algebraic understanding: Implications for instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 77(4), 1-19.
- Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The American Mathematical Monthly*, 110(10), 886-899. doi:10.1080/00029890.2003.11920029
- Gal, H. (2019). When the use of cognitive conflict is ineffective-problematic learning situations in geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 239-256. doi:10.1007/s10649-019-09904-8

- Giannakoulis, E., Mastorides, E., Potari, D. ve Zachariades, T. (2010). Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29, 160-168. doi:10.1016/j.jmathb.2010.07.001
- Glaser, B. G. ve Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. New Brunswick, NJ: Aldine Transaction.
- Goldenberg, P. ve Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 183-194. doi:10.1007/s10649-008-9143-3
- Gorodetsky, M. ve Klavirb, R. (2003). What can we learn from how gifted/average pupils describe their processes of problem solving?. *Learning and Instruction*, 13(3), 305-325. doi:10.1016/S0959-4752(02)00005-1
- Hadamard, J. W. (1945). *Essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Harel, G. (1998). Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa). *The American Mathematical Monthly*, 105(6), 497-507. doi:10.1080/00029890.1998.12004918
- Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. S. Campbell ve R. Zaskis (Ed.), *Learning and teaching number theory* içinde (s. 185-212). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.
- Harel, G. ve Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. A. H. Schoenfeld, J. Kaput ve E. Dubinsky (Ed.), *Research in collegiate mathematics education III* içinde (s. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Healy, L. ve Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428. doi:10.2307/749651
- Hong, E. ve Aquí, Y. (2004). Cognitive and motivational characteristics of adolescents gifted in mathematics: Comparisons among students with different types of giftedness. *Gifted Child Quarterly*, 48(3), 191-201. doi:10.1177/001698620404800304
- Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 29(1), 1-10. doi:10.1016/j.jmathb.2010.01.003
- Leikin, R. (2021). When practice needs more research: The nature and nurture of mathematical giftedness. *ZDM-Mathematics Education*, 53, 1579-1589.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Routledge.
- Marton, F. (1986). Phenomenography-a research approach to investigating different understandings of reality. *Journal of Thought*, 21(3), 28-49. <https://www.jstor.org/stable/42589189> adresinden erişildi.
- Mason, J., Burton, L. ve Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2. bs.). Harlow: Pearson.
- Mata-Pereira, J. ve da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186. doi:10.1007/s10649-017-9773-4
- Miles, M. B. ve Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Thousand Oaks, CA: SAGE.
- Millî Eğitim Bakanlığı. (2018). *Ortaokul matematik dersi (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8.sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB.
- Millî Eğitim Bakanlığı. (2022). *Science and art centers directive*. https://orgm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2022_12/06214921_BIYLIYM_VE_SANAT_MERKEZLERIY_YOYNERGESIY.pdf adresinden erişildi.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. VA: Author.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods* (3. bs.). Thousand Oaks, CA: SAGE.

- Pedemonte, B. ve Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: The case of triangular numbers. *ZDM Mathematics Education*, 43(2), 257-267. doi:10.1007/s11858-011-0311-z
- Péter-Szarka, S. (2012). Creative climate as a means to promote creativity in the classroom. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, 10(28), 1011-1034. doi:10.25115/ejrep.v10i28.1547
- Piaget, J. (1975). *The child's conception of the world*. Totowa, NJ: Littlefield, Adams.
- Sriraman, B. (2004). Gifted ninth graders' notions of proof: Investigating parallels in approaches of mathematically gifted students and professional mathematicians. *Journal for the Education of the Gifted*, 27(4), 267-292.
- Stavy, R. ve Tirosh, D. (1996). Intuitive rules in science and mathematics: The case of 'more of A - more of B'. *International Journal of Science Education*, 18(6), 653-667. doi:10.1080/0950069960180602
- Stylianides, A. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321. doi:10.2307/30034869
- Stylianides, A. J. ve Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 307-332. doi:10.1007/s10857-008-9077-9
- Stylianides, A. J. ve Stylianides, G. J. (2022). Introducing students and prospective teachers to the notion of proof in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 66, 100957. doi:10.1016/j.jmathb.2022.100957
- Stylianides, G. J. ve Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 314-352. doi:10.5951/jresmetheduc.40.3.0314
- Trigwell, K. (2006). Phenomenography: An approach to research into geography education. *Journal of Geography in Higher Education*, 30(2), 367-372. doi:10.1080/03098260600717489
- Yopp, D. A. (2015). Prospective elementary teachers' claiming in responses to false generalization. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 79-99. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.003
- Yopp, D. A., Ely, R., Adams, A. E., Nielsen, A. W., ve Corwine, E. C. (2020). Eliminating counterexamples: A case study intervention for improving adolescents' ability to critique direct arguments. *The Journal of Mathematical Behavior*, 57, 100751. doi:10.1016/j.jmathb.2019.100751
- Watson, A. ve Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wechsler, D. (1975). Intelligence defined and undefined: A relativistic appraisal. *American Psychologist*, 30(2), 135-139. doi:10.1037/h0076868
- Wihlborg, M. (2004). Student nurses' conceptions of internationalisation in general and as an essential part of Swedish nurses' education. *Higher Education Research & Development*, 23(4), 433-453. doi:10.1080/0729436042000276459
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2006). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (6. bs.) Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Zaskis, R. ve Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary?. *Educational Studies in Mathematics*, 68(3), 195-208. doi:10.1007/s10649-007-9110-4
- Zeybek Şimşek, Z. (2021). "Is it valid or not?": Pre-service teachers judge the validity of mathematical statements and student arguments. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 9(2), 26-42. doi:10.30935/scimath/10772