Eğitim ve Bilim

Cilt 46 (2021) Sayı 208 413-430

Orijinal Makale

Gerçekçi, Aritmetik/Cebirsel ve Geometrik Bağlamda Problem Çözme

Marijana Zeljić [1], Milana Dabić Boričić [2], Sanja Maričić [3]

Öz

Son yıllarda, modelleme sürecine ve öğrencilerin kelime problemlerini (gerçekçi bir bağlamı olan sözlü şekilde oluşturulmuş problemler) anlaması konusuna yönelik çok sayıda araştırma yapılmıştır. Bu problemler, matematiksel ilişkilerin anlamını geliştirmek ve matematiksel bilgi ile gündelik durumları birbirine bağlamak için doğal bir çerçeve olarak kabul edilmiştir. Bu çalışmada, sözlü şekilde oluşturulmuş problemlerin, gerçekçi, aritmetik/cebirsel ve geometrik olmak üzere üç farklı bağlamını inceliyoruz. Araştırmanın örneklemi, 62 ilkokul dördüncü sınıf öğrencisinden (10-11 yaş) oluşmaktadır. Sonuçlar, öğrencilerin üç farklı bağlamda problem çözmedeki başarıları arasında anlamlı bir ilişki olduğunu ve aynı zamanda, farklı bağlamlardaki strateji seçimleri arasında da bir ilişki olduğunu göstermektedir. Öğrencilerin problemleri görsel-şematik temsiller kullanmadan çözdükleri gösterilmiştir. Öğrenciler, şaşırtıcı bir biçimde, geometrik bağlamda bile görsel temsilleri kullanmamıştır. Dolayısıyla, öğrenci ve öğretmenlerin görsel-şematik temsiller oluşturma konusundaki ortak faaliyeti, yalnızca problemleri gerçekçi bağlamla çözmenin değil, aynı zamanda geometri problemlerini ve matematiksel dilde sorulan problemleri çözmenin de önemli bir unsuru olmalıdır.

Anahtar Kelimeler

Matematik eğitimi
Kelime problemi
Bağlam
Modelleme süreci
Çözme stratejileri

Makale Hakkında

Gönderim Tarihi: 10.07.2019
Kabul Tarihi: 21.01.2021
Elektronik Yayın Tarihi: 18.05.2021

DOI: 10.15390/EB.2021.8887

Giriş

Okulda matematik problemleri sözlü, grafiksel veya sembolik biçimde veya bu temsillerin bir kombinasyonu şeklinde sorulur. Verschaffel, Greer ve De Corte (2000) sözlü şekilde oluşturulmuş problemler için, kelime problemleri ve sözlü olarak belirtilen sayısal problemler olmak üzere iki kategori tanımlamıştır. Kelime problemleri, öğrencilerin matematiği günlük yaşamda uygulamalarını sağlayan problem durumlarıdır, bu yüzden bunları gerçekçi bağlamdaki problemler olarak adlandıracağız. Diğer yandan, sözlü olarak belirtilen sayısal problemler, matematiksel bir cümle olarak formüle edilen problemlerdir (örn., İkincisi 23 ve toplam 50 ise ilk toplananı hesaplayın). Bunları aritmetik/cebirsel bağlamdaki problemler olarak adlandıracağız. Kelime problemleri ve sözlü olarak belirtilen sayısal problemlerin yanı sıra geometri ve ölçüm kavramları içeren problemler de var olup bunları geometrik bağlamdaki problemler olarak adlandıracağız.

[1] Belgrad Üniversitesi, Öğretmen Eğitim Fakültesi, Sırbistan, marijana.zeljic@uf.bg.ac.rs
[2] Belgrad Üniversitesi, Öğretmen Eğitim Fakültesi, Sırbistan, milana.dabic@gmail.com
[3] Kragujevac Üniversitesi, Öğretmen Eğitim Fakültesi, Sırbistan, sanjamaricic10@gmail.com

Bir bağlamın sözlü şekilde oluşturulmuş bir problem için sağladığı potansiyeller ve sınırlamalar güncel bir konu haline gelmiştir. Son zamanlarda, daha çok gerçekçi bir bağlamı olan problemlere yoğunlaşılmıştır. Birçok çalışmada, çoğu öğrencinin gerçekçi bir bağlamı olan görevlerde düşük başarıya sahip olduğu gösterilmiştir (Schwarzkopf, 2007; Verschaffel vd., 2000). Problem çözmedeki zorlukların nedenleri (1) problemi anlama ve tanıma (Van der Schoot, Bakker Arkema, Horsley ve Van Lieshout, 2009); (2) ilgili ve ilgisiz bilgiler arasındaki farkı görme (Verschaffel vd., 2000); ve (3) problem çözme için gereken matematiksel işlem basamaklarının tanımlanması (Verschaffel vd., 2000) olarak gözlenmiştir. Öte yandan, gerçekçi bir bağlamı olan problemlerde önemli bir didaktik potansiyel vardır. Bağlam, çözme stratejileriyle bağlantı kurmak için kullanılabilir (Van den Heuvel-Panhuizen, 2005). Bağlam, hayal etmesi kolay bir durum içerdiğinde, öğrenciler problemi görsel olarak sunabilir ve çözülmesini kolaylaştırabilir. Gayriresmi stratejiler kullanarak da bir çözüm bulabilirler veya problem çözmede gerçek yaşam deneyimlerini kullanabilirler.

Gerçekçi bağlamda verilen görevlerin aksine, aritmetik/cebirsel bağlamda (matematiksel cümleler) verilen görevler, öğrencilerin problemi görsel olarak çözme ve sunma stratejisini seçmelerine yardımcı olacak gerçekçi bir durum içermemektedir. Ancak, öğrenciler, aritmetik/cebirsel bağlamdaki problemleri çözerken bir problemin durumunu anlamak ve ilgili ve ilgisiz bilgiler arasındaki farkı görmek konusunda yukarıda belirtilen zorlukları yaşamazlar. Aritmetik/cebirsel bağlamdaki problemlerin önemi, cebirsel düşünme için gerekli olan matematiksel iletişim ve dilin gelişiminde görülmektedir (Sfard, 1995; Van Ameron, 2003).

Son olarak, bir problemin görsel temsilinin problem çözmeyi kolaylaştırdığını gösteren birçok sonuç vardır (Boonen, Van der Schoot, Van Wesel, De Vries ve Jolles, 2013; Boonen, Van Wesel, Jolles ve Van der Schoot, 2014; Hegarty ve Kozhevnikov, 1999; Montague ve Applegate, 2000; Van Garderen, 2006). Araştırmacılar, görsel şematik ve resimsel temsillerin kullanımı ve oluşturulmasının, öğrencilerin problem çözmedeki başarısını belirleyen faktörler olduğu sonucuna varmışlardır. Dolayısıyla, bir problem geometrik bağlamda soruluyorsa bağlamın kendisi uygun çizimi (görsel temsil) gerektirir. Bu, öğrencilerin, geometrik bağlamdaki problemleri çözmede, gerçekçi veya aritmetik/cebirsel bağlamdakileri çözmeden daha başarılı olacakları varsayımına yönelik bir argüman olabilir.

Kelime problemi çözme süreci sıklıkla bir modelleme süreci olarak tanımlanır. Modelleme sürecinin temel öneme sahip aşamaları, durumsal modeli anlamak (metnin ilgili unsurları arasındaki ilişkileri fark etmek) ve görsel şematik temsillerle matematiksel modeli oluşturmaktır. Bu çalışmada öğrencilerin, gerçekçi, aritmetik/cebirsel ve geometrik bağlamdaki problemleri çözerken görsel modelleri ne ölçüde kullandığını inceliyor ve öğrencilerin modelleme sürecinde, aritmetik/cebirsel ve geometrik bağlamdaki görsel modelleri aynısını kullanıp kullanmadıklarını (gerçekçi bağlamdaki problemleri çözdüklerinde) araştırıyoruz.

Gerçekçi, aritmetik/cebirsel ve geometrik bağlamlar ayrı ayrı araştırılmış olsa da modern literatür, öğrencilerin bağlamlardan birindeki problemleri çözmede diğer bağlamdakilere kıyasla daha başarılı olup olmadıklarını ve bağlamlardan bazılarının belirli bir çözme stratejisini veya görsel temsillerin kullanımını destekleyip desteklemediğini göstermemektedir -veya incelememektedir.

Sözlü şekilde oluşturulmuş bir problemin bağlamının seçimi, öğretim uygulaması için önemli bir faktördür. Öğrencilerin daha başarılı olduğu bağlamlar problemin matematiksel yapısını en başarılı şekilde tanıdıkları bağlamlardır. Öte yandan, üç bağlamın tamamında öğrencilerin başarısı arasında güçlü bir ilişki varsa gerçekçi bir durumun (gerçekçi bağlamda) veya açıkça sunulan görsel bir modelin (geometrik bağlamda), öğrencilerin problem çözmedeki başarısını belirleyen faktörler olduğunu söyleyemeyiz. Öğrenciler geometrik bağlamda problem çözmede görsel şematik temsilleri (geometrik resimler) kullanmazlarsa bunları aritmetik bağlamda veya gerçekçi bağlamdaki modelleme sürecinde bir aşama olarak da kullanmaları beklenemez. Son olarak, bağlamlardan bazıları, bazı stratejilerin (aritmetik veya cebirsel) kullanımı için daha uygunsa bağlam, öğretimin amacına bağlı olarak öğrencileri, problemi aritmetik veya cebirsel olarak çözmeye yönlendirmek üzere seçilebilir.

Tarih Boyunca Bir Problemin Gerçekçi, Sembolik ve Geometrik Bağlamı

Cebirsel düşüncenin tarihsel gelişimi, bir cebirsel kavramın -veya prosedürün- temsilini ve onun soyutluk seviyesini seçerken öğretim uygulamasında bir kılavuz olarak kullanılabilir. Denklemlerle problem çözme gibi soyut cebirsel kavramlar, yıllarca süren bilişsel süreçlerle kademeli olarak geliştirilir. Dolayısıyla, cebirsel düşünmenin filogenez ve ontogenezi ile öğrencilerin farklı öğrenme düzeylerinde yaşadıkları zorluklar arasındaki benzerliklerin, matematikçilerin nesiller boyunca yaşadığı zorluklara yakın olmasını bekleyebiliriz (Sfard, 1995).

Cebirsel fikirler ilk olarak örnekler (yöntemsel olarak), şekiller, kelimeler ve son olarak semboller aracılığıyla ifade edilmiştir. Gerçekçi bir bağlamı olan kelime problemleri, yöntemsel olan aritmetik ile sembolik dile dayanan cebir arasında açık bir ilişkiyi temsil eder (Sfard, 1995; Van Ameron, 2003). Bu görüş, matematiksel sembolizmin tarihsel gelişiminin araştırılmasından doğmuştur. Babil, Mısır ve Çin cebiri öncelikle günlük durumlardan (mal alışverişi, para vb.) kaynaklanan problemlerle ilgilenmiştir. Bunun, akıl yürütme yolları ve problem çözme yöntemleri geliştirmek için geniş bir bağlam olduğu ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin bu problemlere yönelik doğal bir ilgi ve kapasitesinin bulunması, bunların öğretim uygulamalarında kullanılmasını sağlamış ve bunları, öğrencilerin gayriresmi stratejilerini geliştirmeye uygun hale getirmiştir. Cebirsel düşüncenin tarihsel gelişimindeki önemli aşamalardan biri de antik Yunan geometrik cebiridir (Sfard, 1995). Antik Yunanlılar geometrik nesneleri görsel temsiller olarak kullanmışlardı, çünkü karmaşık hesaplamaları somutlaştırmanın daha iyi bir yolu yoktu. Dolayısıyla, tarihsel gelişim açısından problem çözme için en doğal bağlam gerçekçi, sonra geometrik ve en son cebirsel olmalıdır. Öğrencilerin modern cebire hazır olmaları için veya çalışmamız bağlamında, sözlü şekilde oluşturulmuş problemleri denklemlerle çözmeleri için soyutlamalarla ilgili çok fazla zaman ve deneyime ihtiyaç vardır.

Önceki araştırmalar, öğrencilerin aynı matematiksel yapı ile problem çözmedeki başarılarını bu üç bağlamda (gerçekçi, geometrik ve aritmetik/cebirsel) karşılaştırmamıştır. Kelime problemlerini, sembolik olarak sorulan problemleri ve sözlü olarak belirtilen sayısal problemleri çözmedeki başarıyı karşılaştıran çalışma, öğretmenlerin ve araştırmacıların bu tür problemlerin zorluğuna ilişkin düşüncelerinin elde edilen sonuçlardan farklı olduğunu göstermiştir (Nathan ve Koedinger, 2000). Öğretmen ve araştırmacılar, sözlü şekilde oluşturulmuş problemlerin öğrenciler için sembolik olarak sorulan problemlerden daha zor olduğunu varsaymışlardır. Aksine, öğrenciler için en zor olan sembolik problemlerdi. Bu sonucun tarihsel gelişime uygun olduğunu söyleyebiliriz. Ancak bu çalışmada, öğrencilerin geometrik bağlamda sorulan problemleri çözmedeki başarıları dikkate alınmamıştır.

Kelime Problemleri ve Modelleme Süreci

Kelime problemlerinin tanımlarından biri, bir problem durumunun, problemin metninde verilen sayısal veriler üzerinde matematiksel işlemler yapılarak cevabın bulunabileceği sözlü bir tanımını temsil etmeleridir (Verschaffel, Depaepe ve Van Dooren, 2014). Bu, geleneksel problem çözmenin temelidir; yalnızca işlemsel kuralların bir uygulaması olarak kabul edilen süreçtir. Problem durumunun yapısı ile sembolik matematiksel ifadenin yapısı arasındaki ilişkilerin fark edildiğini varsayar (English, 2009). Bu süreçte öğrenciler, problem çözmedeki analiz ve hesaplamalarını, anahtar kelime stratejisi olarak adlandırılan (De Corte, Greer ve Verschaffel, 2000) ve problem çözmede sık karşılaşılan bir engel olarak tanımlanan (Verschaffel vd., 2000), metindeki nicel unsurlar ile matematiksel işlemler arasındaki yüzeysel ilişkiye dayandırmaktadırlar.

Anahtar kelime yaklaşımı gibi yaklaşımların, öğretmenlerin, bir problemin bağlamsal yönünü değil, yalnızca matematiksel yapısını vurgulama eğiliminde oldukları uygulamaları tarafından desteklendiği varsayılmaktadır (Depaepe, De Corte ve Verschaffel, 2010). Diğer bir deyişle, öğretmenlerin sonuçlara odaklanması yaygındır (Gravemeijer, 1997). Öğrenciler, kelime problemlerini bu şekilde çözerek ders kitaplarında verilen problem çözme basamaklarını taklit etmek suretiyle yalnızca hesaplama becerilerini kullanır, kavramsal anlamayı ve doğru matematiksel akıl yürütmeyi kullanmazlar (Boesen, Lithner ve Palm, 2010; Jonsson, Norqvist, Liljekvist ve Lithner, 2014; Lithner, 2008). Ancak bu yaklaşımlar, etkili zihinsel modelin oluşturulması için bunlar arasında çok sayıda unsur ve ilişkiye ihtiyaç duyulduğunda başarılı bir problem çözme sağlamaz (Thevenot, 2010; Van der

Schoot vd., 2009). Bu zorlukların üstesinden gelmenin yollarını araştıran birçok çalışma, kelime problemi çözmede modelleme sürecinin önemini vurgulamıştır. Bu süreçte, öğrenciler: (1) problemin içsel bir temsilini oluşturmalı (Depaepe vd., 2010; Moore ve Carlson, 2012; Voyer, 2011) ve (2) bir problem çözme stratejisi seçmelidir (De Corte ve Verschaffel, 1991; Van den Heuvel-Panhuizen, 2005). Öğrencilerin strateji seçimi, öğrencilerin problemi yorumlamasına dayanan içsel temsil ile ilgilidir.

Modelleme süreci, gerçek dünya ile matematiksel dünya arasında bir etkileşim olduğunu varsayar (Schwarzkopf, 2007). Pek çok aşaması olan karmaşık bir süreçtir: (1) bir problem durumunun unsurları ve ilişkileri anlamakla ilgili olan, içsel bir modelinin oluşturulması, (2) durum modelini matematiksel bir modele dönüştürülmesi, (3) sonucu elde etmek amacıyla matematiksel model ile çalışılması, (4) hesaplamaların sonuçlarını yorumlanması (5) sonuçların hesaplamalar açısından değerlendirilmesi (6) sonuçların iletilmesi (Blum ve Leiss, 2007). Bu çok aşamalı model tamamen sıralı değildir; modelin bazı aşamalarına birçok kez geri dönüldüğünü varsayar.

Karmaşık kelime problemlerinin çözümü için daha önce sözü edilen modelleme aşamaları kaçınılmazdır. Daha genel olarak, sözlü şekilde oluşturulmuş problemlerin (kelime problemleri, sözlü olarak belirtilen matematik problemleri ve geometrik problemler) başarılı bir şekilde çözülmesi için gereken iki beceri bileşeni vardır: 1) ilişkisel işleme, yani, metindeki ilgili unsurlar arasındaki ilişkiyi fark etme ve 2) görsel-şematik temsillerin oluşturulması (Boonen vd., 2013). Bu durumlar derinlemesine bir ilişkisel değerlendirme yapılmasını ve görsel-şematik temsillerin oluşturulmasını gerektirir. Problem durumunun görselleştirilmesi, problemdeki ilişkilerin anlaşılmasını ve böylelikle problemin başarılı bir şekilde çözülmesini sağlar.

Görsel-Şematik Temsiller

Birçok yazar, sözlü şekilde oluşturulmuş problemi anlamanın ve metindeki unsurlar arasında ilişkileri kurmanın yanı sıra görsel-şematik temsillerin oluşturulmasının önemini vurgulamaktadır (Boonen vd., 2013, 2014; Hegarty ve Kozhevnikov, 1999; Montague ve Applegate, 2000; Van Garderen, 2006; Van Garderen ve Montague, 2003). Çalışmalarda, oluşturulan görsel temsillerin niteliğinin, öğrencilerin problem çözmedeki verimliliğini belirlediği bildirilmektedir. Ancak öğrenciler modelleme sürecinde görsel-şematik temsiller kullanmazlar (Verschaffel vd., 2000; Verschaffel, Greer, Van Dooren ve Mukhopadhyay, 2009; Verschaffel, Van Dooren, Greer ve Mukhopadhyay, 2010; Şahin ve Eraslan, 2016).

Literatürde kabul edilen iki tür görsel temsil vardır: resimsel ve görsel-şematik temsiller (Hegarty ve Kozhevnikov, 1999; Presmeg, 1997). Resimsel temsiller oluşturan öğrenciler, verilen unsurların görsel görünümüne odaklanma eğilimindedir. Ancak bazı çalışmalar, ayrıntılı görsel temsillerin oluşturulmasının, problem çözme başarısı ile olumsuz bir ilişki içinde olduğunu göstermiştir (Ahmad, Tarmizi ve Nawawi, 2010; Hegarty ve Kozhevnikov, 1999; Kozhevnikov, Hegarty ve Mayer, 2002; Presmeg, 1997; Van Garderen, 2006; Van Garderen ve Montague, 2003). Öte yandan, görsel-şematik temsiller yaratan öğrenciler, metnin ilgili unsurlarını tutarlı bir temsile entegre etmektedir (Ahmad vd., 2010; Van Garderen, 2006). Bu durum, görsel-şematik temsiller oluşturmanın neden problem çözme başarısı ile olumlu bir ilişki içinde olduğunu açıklamaktadır (Hegarty ve Kozhevnikov, 1999; Van Garderen, 2006; Van Garderen ve Montague, 2003).

Modellemeyi ve şemalaştırmayı teşvik eden iki yaklaşım vardır: 1) öğrencilere kendi yöntemleriyle yeniden oluşturabilecekleri "önceden tanımlanmış temsiller" sunmak (Diezmann, 2002) veya 2) öğrencilerin modellerini başlangıç noktası olarak kullanmak (Gravemeijer, 2002; Van Dijk, Van Oers ve Terwel, 2003). Hangi yaklaşımın daha iyi olduğu yönündeki tartışmanın cevabı, çözme stratejilerinde bilişsel esnekliği inceleyen araştırmalarda bulunabilir (Heinze, Star ve Verschaffel, 2009). Öğrencilerin problem çözmede nispeten yeni süreçler üretme yetenekleri, temsiller oluşturma faaliyetine katılımlarına ve yönlendirmeli ortak oluşturma faaliyetinin sonucu olan nihai temsilin özelliklerine bağlıdır (Ainsworth, 2006; Keijzer ve Terwel, 2003; Terwel, Van Oers, Van Dijk ve Van den Eeden, 2009). Heinze ve diğerleri (2009), strateji ve temsillerin esnek ve uyarlanabilir şekilde kullanılmasının, hızlı ve net problem çözmeyi sağlayan bilişsel değişkenliğin bir parçası olduğunu vurgulamaktadır. Bu becerilerin gelişimi, sadece deneyim artışına dayanmamaktadır. Bunların kazanımının, karmaşık bilişsel süreçlere dayandığını varsayabiliriz. Strateji ve temsillerin esnek/uyarlanabilir şekilde kullanılması, matematik öğretiminin önemli bir unsuru olarak kabul edilir. Öğrencilerin matematiksel görevleri yalnızca hızlı ve doğru bir şekilde değil, aynı zamanda uyarlanabilir bir şekilde de çözebilmeleri (yani, problem ve bağlam özelliklerini dikkate alarak strateji ve temsilleri uyarlamalı olarak uygulayabilmeleri) gerektiği konusunda yaygın bir görüş birliği vardır (Elia, Van den Heuvel-Panhuizen ve Kolovou, 2009; Verschaffel, Greer ve De Corte, 2007).

Çalışmanın Amacı ve Gerekçesi

Bu çalışmada, bir problemin bağlamının, öğrencilerin başarısını, çözme stratejisini ve problem çözmede görsel modeller oluşturmalarını nasıl etkilediğini araştırıyoruz. Bir problemin matematiksel yapısını seçtik ve bunu, problemin matematiksel yapısını değiştirmeden gerçekçi, aritmetik/cebirsel ve geometrik olmak üzere üç farklı bağlamda sunduk.

Bağlamlar, farklı problem çözme stratejileri ve farklı görsel temsillerle sonuçlanan farklı zihinsel imgeler önerebilecek şekilde seçilmiştir. Öğrencilerin, gerçekçi bağlamdaki problemleri, aritmetik stratejilerle ve sıklıkla resimsel temsiller kullanarak; aritmetik/cebirsel bağlamdaki problemleri, cebirsel stratejilerle; geometrik bağlamdaki problemleri ise görsel-şematik temsiller kullanarak çözmelerini bekliyoruz.

Dolayısıyla, bu çalışmada, aşağıdaki araştırma sorularını sorduk:

1. Öğrencilerin, farklı bağlamlarda (gerçekçi, aritmetik/cebirsel veya geometrik) problem çözmedeki başarılarında önemli bir fark var mı?
2. Öğrencilerin üç farklı bağlamın tamamında problem çözmedeki başarıları arasında önemli bir ilişki var mı?
3. Bir problemin bağlamı, öğrencilerin çözme stratejisi (aritmetik veya cebirsel) ve görsel şematik temsil seçimini etkiler mi? Problem çözmede görsel temsil kullanılması halinde öğrencilerin strateji seçimlerini ve ilgili stratejinin öğrencileri doğru sonuca götürüp götürmediğini de analiz edeceğiz.

Yöntem

Araştırmanın örneklemi, Belgrad'daki (Sırbistan) üç farklı okuldan 62 ilkokul dördüncü sınıf öğrencisinden (10-11 yaş) oluşmaktadır. Okullar, eğitim araştırmaları için araştırmacılar kurumuna sunulan okullar listesinden rastgele seçilmiştir. Okullar, şehrin benzer sosyo-ekonomik yapıya sahip farklı bölgelerinde yer almaktadır.

Deneysel prosedürden önce öğretmenlerle öğretmenlik uygulamaları hakkında yapılandırılmamış bir görüşme yapmıştık. Tüm öğretmenler resmi matematik müfredatına göre çalışıyor ve aynı ders kitaplarındaki matematiksel görevleri kullanıyordu. Sırbistan'daki milli müfredat, öğrencilerin bu çalışmada incelenen tüm bağlamlarla (gerçekçi, aritmetik/cebirsel ve geometrik) ilgili deneyim sahibi olmalarını öngörmektedir. Cebirsel sembolizm ve denklem çözme erkenden, ikinci sınıftan (8 - 9 yaş) itibaren öğretilir ve sözlü şekilde oluşturulmuş problemleri çözmek için kullanılır. Öğrencilerin, geometrik bağlamda, gerçekçi ve aritmetik/cebirsel bağlamlara göre daha az deneyime sahip oldukları sonucuna varacaktık, çünkü geometri, toplam ders sayısının yaklaşık beşte birini oluşturuyordu. Öte yandan, geometrideki çoğu görev ölçümle ilgilidir (örn., çevre, alan) ve cebirsel görevlere dönüştürülür, dolayısıyla bu ders sayısının bağlamın anlaşılması için yeterli olduğu düşünülmektedir.

Araştırma, test tekniğine dayanmaktadır. Çalışmanın amacı doğrultusunda altı sözlü şekilde oluşturulmuş problem içeren üç farklı test oluşturduk (Tablo 1). Her testte, ilgili görevler aynı matematiksel yapıya sahiptir, ancak gerçek bağlam, cebirsel/aritmetik bağlam (matematiksel cümleler) ve geometrik bağlam olmak üzere farklı bağlamlarda temsil edilmektedirler. Öngördüğümüz üzere, öğrenciler tüm bağlamlarla ilgili deneyime sahipti ve testlerdeki görevlerin gerektirdiği matematiksel prosedürler hakkında bilgi sahibiydi. Bu tip görevler tasarlamanın ardında yatan ana fikir, öğrencilerin, bunları, bildikleri prosedürlerle çözebilecek olmaları ve görevlerin doğru parçası modeli ile daha kolay çözülebilecek olmasıdır. Öğrencilerin ders kitabındaki olağan görevler, testteki ilk üç görevde (Tablo 1) olduğu gibi daha basit bir matematiksel yapıya sahipken, testteki 4., 5. ve 6. görevler ders kitabındaki standart görevlerden daha karmaşıktır. Hesaplama hataları bu çalışma açısından önemli olmadığından hesap yapması kolay sayılar kullandık.

Tablo 1. Test için kullanılan, farklı bağlamlarda sözlü şekilde oluşturulmuş problemler

Görev No	Gerçekçi bağlam	Aritmetik/cebirsel bağlam	Geometrik bağlam
1.	Çikolata ve meyve suyu 130 dinardır. Çikolata ve iki meyve suyu 180 dinardır. Çikolatanın ve meyve suyunun fiyatı nedir?	İki toplananın toplamı 130'dur. İlk toplananın ve ikinci çift toplananın toplamı 180'dir. Sayılar hangileridir?	AB ve CD doğru parçalarının uzunluklarının toplamı 130 mm'dir. AB doğru parçası ile çift CD doğru parçasının toplamı 180 mm'dir. AB ile CD'nin uzunlukları nedir?
2.	Nadja ile Lena'nın yaşlarının toplamı, Nadja'nın yaşından 20 fazla, Lena'nın yaşından ise 15 fazladır. Nadja ve Lena kaç yaşındadır?	İki sayının toplamı, ilk toplanandan 20, ikinci toplanandan 15 fazladır. Sayılar hangileridir?	İki doğru parçasının uzunluklarının toplamı, ilk parçanın uzunluğundan 20 mm, ikinci parçanın uzunluğundan ise 15 mm daha fazladır. Her bir doğru parçasının uzunluğu kaçtır?
3.	Sonja'nın birden çok çıkartması vardır; Nadja'nın, çıkartmalarının sayısı Sonja'nın çıkartmalarının sayısından bir fazladır; Mila'nın çıkartmalarının sayısı ise Sonja'nın çıkartmalarının sayısından bir fazladır. Hepsinin çıkartmalarının toplamı 48'dir. Her bir kızın kaç çıkartması vardır?	Üç ardışık sayının toplamı 48'dir. Sayılar hangileridir?	AB doğru parçası verilmiştir. CD doğru parçası, AB doğru parçasından 1 cm daha uzundur, EF doğru parçası ise CD doğru parçasından 1 cm daha uzundur. Üç doğru parçasının tamamının toplam uzunluğu 48 cm'dir. Her doğru parçasının uzunluğunu hesaplayın.
4.	Kız kardeşin parası, erkek kardeşinkinin 4 katıdır. Kız kardeş 60 dinar harcadığında, kız kardeş ile erkek kardeşin eşit miktarda parası olur. Kız kardeşin ve erkek kardeşin her birinin ne kadar parası vardır?	Bir sayı diğerinden 4 kat daha büyüktür. Bu iki sayıdan büyük olanından 60 çıkarıldığında bu sayı, ikinci sayıya eşit olacaktır. Sayıları belirleyin.	CD doğru parçası AB doğru parçasından 4 kat daha uzundur. CD doğru parçası 60 mm daha kısa olduğunda, uzunluğu, AB doğru parçasının uzunluğuna eşit olacaktır. Tüm doğru parçalarının uzunluğunu belirleyin.
5.	Maria'nın Jovana'dan 10 tane daha fazla çıkartması vardır. Jovana çıkartma sayısını ikiye katlar ve ardından Maria'ya 20 tane verir. Eşit sayıda çıkartmaya sahip oldukları sonucuna varırlar. Kızlardan her birinin başlangıçta kaç çıkartması vardı?	Bir sayı diğerinden 10 fazladır. Diğeri ikiyle çarpılıp bulunan sayıdan 20 çıkarıldığında, ilkine de 20 eklendiğinde bu sayılar eşit olacaktır. Sayılar hangileridir?	AB doğru parçası CD doğru parçasından 10 mm daha uzundur. CD'nin uzunluğu ikiye katlanıp 20 mm kısaltıldığında, AB de 20 mm uzatıldığında bunlar eşit uzunluklara sahip olurlar. AB ve CD doğru parçalarının uzunluklarını belirleyin.

Tablo 1. Devamı

Görev No	Gerçekçi bağlam	Aritmetik/cebirsel bağlam	Geometrik bağlam
6.	Bir kapta, daha küçük bir kapta olduğundan 3 kat daha fazla süt vardır. Büyük olan kaba 9 lt, küçük olana ise 8 lt süt eklendiğinde, büyük kapta, küçük kaptakinin 2 katı daha fazla süt olacaktır. Başlangıçta her kapta ne kadar süt vardır?	İlk sayı, ikincinin üç katıdır. İlkine 9, ikincisine ise 8 eklendiğinde, ilki, ikincinin iki katı olacaktır. İşlemin başlangıcındaki sayılar hangileridir?	AB doğru parçası CD doğru parçasından üç kat daha uzundur. AB 9 cm, CD ise 8 cm uzatıldığında, AB, CD'nin iki katı uzunlukta olacaktır. İşlemin başlangıcında AB ile CD'nin uzunlukları nedir?

Öğrenciler testleri bireysel olarak çözmüşlerdir. Öğrencilere, testteki görevleri çözmeleri için sınırsız süre tanınmış, ancak hepsi bir saat içinde testi tamamlamıştır. Testler bir hafta arayla yapılmıştır. Bu yöntemin potansiyel sınırlaması, bazı öğrencilerin ikinci veya üçüncü test üzerinde çalışırken bir görevin matematiksel yapısını ilk testten tanıyabilecek olmasıdır. Bu durum, ikinci/üçüncü testte ilkine göre daha başarılı olunmasına yol açmış olabilir. Bu sınırlamayı en aza indirmek için, farklı okullardan öğrenciler testler üzerinde farklı sırayla çalıştılar. Birinci okul öncelikle gerçekçi, ardından aritmetik/cebirsel, son olarak da geometrik bağlam üzerinde, ikinci okul öncelikle aritmetik/cebirsel, ardından geometrik, son olarak da gerçekçi bağlam üzerinde, üçüncü okul ise öncelikle geometrik, ardından gerçekçi ve son olarak da aritmetik/cebirsel bağlam üzerinde çalıştı.

Veri Analizi

Öğrencilerin, gerçekçi, aritmetik/cebirsel ve geometrik bağlamlardaki problemleri çözme başarısında önemli bir fark veya ilişki olup olmadığı sorusuna cevap vermek için bir öğrencinin problemi her bağlamda doğru çözüp çözmediğini kaydediyoruz. Verschaffel ve De Corte'nin (1990) kelime problemlerini çözme stratejileri hakkındaki çalışmasında olduğu gibi, hesaplama hatalarını dikkate almadık. Bir öğrenci bir problemin matematiksel yapısını tanıdıysa ve çözümü için uygun bir matematiksel model seçtiyse sonucu doğru olarak kabul ettik.

Testlerdeki her görevi (1 ila 6 No'lu Görevler, Tablo 1) üç bağlamda analiz ettik. Her görev için, görevin, gerçekçi, aritmetik/cebirsel veya geometrik bağlamda doğru şekilde çözülüp çözülmediğini kaydettiğimiz *Doğru çözüm bağlamı i* ($i = 1,\ldots, 6$) şeklinde kategorik bir değişken oluşturduk. *Doğru çözüm bağlamı i* değişkenlerinin, gerçekçi bağlamda doğru çözüm, r; aritmetik/cebirsel bağlamda doğru çözüm, a ve geometrik bağlamda doğru çözüm, g olmak üzere üç değeri vardır. Her bağlamda öğrencilerin doğru çözüm sayısındaki farklılığın analizi için *Doğru çözüm bağlamı i* değişkenleri üzerinde Ki kare uyum iyiliği testini kullandık.

Öğrencilerin başarısının önemli göstergeleri, görevi gerçekçi bağlamda doğru çözen öğrenci sayısı (n_r), görevi aritmetik/cebirsel bağlamda doğru çözen öğrenci sayısı (n_a) ve görevi geometrik bağlamda doğru çözen öğrenci sayısıdır (n_g). Tüm bağlamlardaki doğru cevapların toplamını ($n_r + n_a + n_g$) görevdeki toplam değer sayısı olan 186'ya (3 testte 62 katılımcı) bölerek her bir görevdeki doğru cevapların yüzdesini, yani, *ortalama başarıyı* da hesapladık.

Tüm bağlamlarda öğrencilerin başarıları arasındaki ilişkiyi analiz etmek için üç adet ikili değişken oluşturduk: Öğrencilerin gerçekçi, aritmetik/cebirsel ve geometrik bağlamlardaki başarılarını ifade eden R*'de Başarı, A'da Başarı ve G'de Başarı*. Her değişkenin iki olası değeri vardır: öğrenci problemi doğru çözmüştür veya öğrenci problemi doğru çözmemiştir. Bu üç değişken arasında bir ilişki olup olmadığını analiz etmek için, çoklu karşılaştırmalar için Bonferroni düzeltmeli Ki kare bağımsızlık testini ($p < 0{,}017$), bir ilişki ölçüsü olarak da fi katsayısını kullandık.

Bir problemin bağlamının, öğrencilerin çözme stratejisi (aritmetik veya cebirsel) ve görsel şematik temsil seçimini etkileyip etkilemediğini de araştırıyoruz. Dolayısıyla, bir öğrencinin problem çözmede aritmetik veya cebirsel strateji kullanıp kullanmadığını, görsel bir temsil kullanıp kullanmadığını ve ne tür bir temsil kullandığını analiz ediyoruz. Böylece, bir yandan modellerin/görsel temsillerin yaratılması, diğer yandan ise başarı ve strateji seçimi arasında bir ilişki olup olmadığının cevabını verebiliriz.

Öğrencilerin stratejilerinin analizi için, olası değerleri *aritmetik* veya *cebirsel* olan *R'deki Strateji, A'daki Strateji* ve *G'deki Strateji* şeklinde üç adet ikili değişken oluşturduk. Öncelikle, bu değişkenleri, sonucun doğruluğunu değil, yalnızca öğrencilerin problemi çözmeye çalışırken kullandıkları stratejiyi dikkate alarak çoklu karşılaştırmalar için Bonferroni düzeltmeli Fisher-Freeman-Halton testi ile karşılaştırdık ($p < 0{,}017$). Fisher-Freeman-Halton testi, değişkenlerin Ki kare testi için gereken tüm varsayımları karşılamaması sebebiyle Ki kare testine alternatif olarak kullanılmıştır. Öğrencilerin kullandıkları strateji ile sonucun doğruluğu arasındaki ilişkiyi araştırmak için, Fisher-Freeman-Halton testini kullanarak *R'deki Strateji* değişkeni ile *R'de Başarıyı*, *A'daki Strateji* ile *A'da Başarıyı* ve *G'deki Strateji* ile *G'de Başarıyı* karşılaştırdık. Bu analizde çoklu karşılaştırma olmadığından, $p = 0{,}05$ anlamlılık düzeyini kullandık.

Problem çözmede görsel temsil kullanımının analizi için her bağlamda görsel temsillerin sayısını ve türünü (görsel-şematik veya resimsel) kaydettik. Bir öğrencinin problem çözmede görsel temsili kullanırken kullandığı stratejiyi ve bu stratejinin onu doğru sonuca götürüp götürmediğini inceledik.

Farklı bağlamlarda kullanılan görsel temsillerin sayısında farklılıklar olup olmadığına ilişkin soruya cevap vermek için, gerçekçi bağlamda görsel temsil kullanımı, *r*; aritmetik/cebirsel bağlamda görsel temsil kullanımı *a* ve geometrik bağlamda görsel temsil kullanımı, *g* olmak üzere üç olası değere sahip olan *Görsel bağlamı* değişkenini oluşturduk ve Ki kare uyum iyiliği testini yaptık.

Sonunda, bir öğrencinin, gerçekçi, aritmetik/cebirsel ve geometrik bağlamdaki en az bir görevde görsel temsil kullanıp kullanmadığını gösteren, *R'de Görseller*, *A'da Görseller* ve *G'de Görseller* şeklinde üç adet ikili değişken oluşturduk. Değişkenlerden her birinin iki olası kategorik değeri vardır: Öğrenci görsel modeli en az bir görevde kullanmıştır veya kullanmamıştır. Öğrencilerin her bir bağlamda kullandıkları görsel temsillerin sayıları arasındaki farkı karşılaştırmak için Bonferroni düzeltmesi ile Ki kare bağımsızlık testini ($p < 0{,}017$) yaptık ve bir ilişki ölçüsü olarak da fi katsayısını kullandık.

Bulgular

İlk olarak, her bağlamdaki doğru çözümlerin sayısı arasındaki farklılıkları araştırdığımız *Doğru çözüm bağlamı i* kategorik değişkenleri analizinin sonuçlarını sunacağız. Ki kare uyum iyiliği testi, altı görevin her birindeki üç bağlamda ulaşılan doğru cevapların sayısında anlamlı bir fark olmadığını, yani, p değerlerinin her birinin 0,05'ten büyük olduğunu göstermiştir (Tablo 2). Tablo 2, Ki kare testi sonuçlarının yanı sıra her bağlamda görevi doğru çözen öğrenci sayısını ve ortalama başarıyı (doğru cevapların ortalama yüzdesi) göstermektedir.

Tablo 2. Farklı bağlamlardaki doğru cevap sayılarında (n_r, n_a ve n_g) oluşan farklılığı ve ortalama başarıyı analiz etmeye yönelik Ki kare uyum iyiliği testi sonuçları ($n = n_r + n_a + n_g$)

Görev No.	Değişken	$\chi^2(2, n)$	p	(n_r, n_a, n_g)	Ortalama başarı
1.	*Doğru çözüm bağlamı 1*	0,105	0,949	(59, 56, 56)	%91,94
2.	*Doğru çözüm bağlamı 2*	0,292	0,864	(51, 46, 47)	%77,42
3.	*Doğru çözüm bağlamı 3*	0,275	0,872	(52, 43, 48)	%76,88
4.	*Doğru çözüm bağlamı 4*	0,110	0,947	(23, 25, 25)	%39,25
5.	*Doğru çözüm bağlamı 5*	2,167	0,338	(8, 13, 15)	%19,35
6.	*Doğru çözüm bağlamı 6*	0,182	0,913	(11, 10, 12)	%17,74

R'de Başarı, A'da Başarı ve G'de Başarı değişkenleri üzerinde yapılan Ki kare bağımsızlık testi ve hesaplanan fi katsayısı, hemen hemen her görevde farklı bağlamlardaki başarılar arasında orta ila güçlü düzeyde bir ilişki olduğunu göstermiştir ($p < 0,017$, orta için $\varphi > 0,3$, güçlü için $\varphi > 0,5$ Tablo 3).

Tablo 3. Farklı bağlamlardaki başarılar arasındaki ilişkiyi araştırmaya yönelik Ki kare bağımsızlık testinin sonuçları

	R'de Başarı A'da Başarı			*R'de Başarı G'de Başarı*			*A'da Başarı G'de Başarı*		
Görev No	$\chi^2(1, 62)$	*p*	φ	$\chi^2(1, 62)$	*p*	φ	$\chi^2(1, 62)$	*p*	φ
1.	-	0,267	-	-	0,267	-	-	0,472	-
2.	29,602	0,000	0,691	32,454	0,000	0,723	30,352	0,000	0,700
3.	12,098	0,004	0,442	15,336	0,001	0,497	18,394	0,000	0,544
4.	27,170	0,000	0,662	21,870	0,000	0,594	33,211	0,000	0,732
5.	16,182	0,000	0,511	12,928	0,000	0,457	32,743	0,000	0,727
6.	42,656	0,000	0,829	33,427	0,000	0,734	38,123	0,000	0,784

İlk görevde ilişki olmaması ($p > 0,017$), bunun çözülmesindeki yüksek başarı düzeyinin sonucudur. Öğrencilerin %90'ından fazlası, her üç bağlamda da görevi doğru bir şekilde çözmüştür (bkz. Tablo 2'deki Ortalama başarı). Uyumsuzluk, örneklemin geri kalanında olup %10'dan azdır.

R'deki Strateji, A'daki Strateji ve *G'deki Strateji* değişkenleri üzerinde yapılan Fisher-Freeman-Halton testi, öğrencilerin farklı bağlamlardaki strateji seçimi (aritmetik veya cebirsel) arasında anlamlı bir ilişki ($p < 0,017$) olduğunu, ancak *p* değerinin 0,017'den büyük olduğu ilk görevdeki *R'deki Strateji* ile *A'daki Stratejinin* karşılaştırılmasında anlamlı bir ilişki olmadığını göstermiştir (Tablo 4). Ayrıca, Tablo 4'teki Fi katsayısı, ilişkinin orta düzeyde ($\varphi > 0,3$) olduğu ilk görev dışında her görevde güçlü bir ilişki ($\varphi > 0,5$) olduğunu göstermiştir.

Tablo 4. Farklı bağlamlardaki strateji kullanımları arasındaki ilişkiyi ve fi katsayısı değerlerini araştırmaya yönelik Fisher-Freeman-Halton testinin sonuçları (n: görevi her iki bağlamda da çözmeye çalışan öğrenci sayısı)

	R'deki Strateji A'daki Strateji			*R'deki Strateji G'deki Strateji*			*A'daki Strateji G'deki Strateji*		
Görev No.	n	*p*	φ	n	*p*	φ	n	*p*	φ
1.	62	0,030	-	60	0,006	0,485	60	0,004	0,443
2.	54	0,000	0,573	53	0,001	0,527	51	0,000	0,732
3.	58	0,000	0,781	54	0,000	0,761	55	0,000	0,734
4.	49	0,000	0,745	44	0,000	0,795	43	0,000	0,741
5.	34	0,003	0,525	35	0,000	0,767	36	0,000	0,708
6.	25	0,000	0,761	22	0,002	0,726	22	0,000	0,913

Çözme stratejisi ile problem çözmedeki başarı (öğrencilerin başarısı) arasındaki ilişki ile ilgili soruyu cevaplamak için de Fisher-Freeman-Halton testini ve fi katsayısını kullandık. İlk dört görevde anlamlı sonuçlar elde etmedik ($p > 0,05$), bu nedenle istatistiksel olarak anlamlı olan 5. ve 6. görevlere ilişkin sonuçları belirteceğiz (Tablo 5).

Tablo 5. 5. ve 6. görevlerde strateji seçimi ile çözümün doğruluğu (n: görevi çözen öğrenci sayısı) arasındaki ilişkiyi araştırmaya yönelik Fisher-Freeman-Halton testinin sonuçları

	Gerçekçi			Aritmetik/cebirsel			Geometrik		
Görev No.	n	*p*	φ	n	*p*	φ	n	*p*	φ
5.	42	0,007	0,438	43	0,056	0,299	41	0,040	0,327
6.	28	0,019	0,486	28	0,005	0,559	28	0,063	0,351

Tablo 5'teki sonuçlar, 5. ve 6. görevlerde çözme stratejisi ile çözümün doğruluğu arasında zayıf ila orta düzeyde bir ilişki olduğunu göstermektedir ($p < 0,05$, $0,3 < \varphi < 0,5$). Cebirsel/aritmetik bağlamda 5. ve geometrik bağlamda 6. görevde olasılıklar anlamlılık düzeyine yakındır (5. görev için p=0,056, 6. görev için p=0,063), dolayısıyla bu sonucu anlamlı olarak kabul ediyoruz. Bu sonucun daha ayrıntılı analizi için bu iki görevdeki bazı stratejileri kullanmak suretiyle problemi doğru veya yanlış çözen öğrencilerin yüzdelerini analiz etmemiz gerekti (Tablo 6). Tablo 6'daki sonuçlar, aritmetik stratejiyi seçen öğrenci grubunun, cebirsel strateji kullanan öğrenci grubuna göre daha fazla yanlış sonuç yüzdesine sahip olduğunu göstermektedir. 5. görevde, problemi aritmetik strateji kullanarak çözmeye çalışan öğrencilerin %95,8'i, problemi gerçekçi bağlamda yanlış çözmüş, %79,3'ü problemi aritmetik/cebirsel bağlamda yanlış çözmüş, %76'sı ise geometrik bağlamda yanlış çözmüştür. 6. görevde yanlış cevapların yüzdesi benzerdir.

Tablo 6. 5. ve 6. görevde strateji seçimi ve doğru/yanlış sonuçların yüzdesi

		Gerçekçi		Aritmetik/cebirsel		Geometrik	
Görev No	Çözme stratejisi	Doğru	Yanlış	Doğru	Yanlış	Doğru	Yanlış
5.	Aritmetik	%4,2	%95,8	%20,7	%79,3	%24,0	%76,0
	Cebirsel	%38,9	%61,1	%50	%50	%56,3	%43,7
6.	Aritmetik	%18,8	%81,3	%12,5	%87,5	%26,7	%73,3
	Cebirsel	%66,7	%18,3	%66,7	%33,3	%61,5	%38,5

Tablo 7'deki sonuçlar problem çözmede görsel temsilleri kullanan öğrenci sayısını göstermektedir. Yirmi öğrenci, modeli gerçekçi bağlamda, 17'si aritmetik/cebirsel bağlamda, 25'i ise geometrik bağlamda kullanmıştır. *Görsel bağlamı* değişkeni (görsel temsil bağlamını içerir) üzerinde yapılan Ki kare uyum iyiliği testi, bu sayılardaki farklılıkların istatistiksel olarak anlamlı olmadığını göstermiştir $\chi^2(2, 62) = 1,38$, $p = 0,454$.

Tablo 7. Farklı bağlamlarda modeller kullanan öğrenci sayısı ve görevlerin doğruluğu

Strateji		Gerçekçi	Aritmetik/cebirsel	Geometrik	Toplam
Aritmetik	Doğru	15	12	16	43
	Yanlış	3	2	3	8
Cebirsel	Doğru	2	3	5	10
	Yanlış	-	-	1	1
Toplam model sayısı		20	17	25	62

Tablo 7'deki veriler, öğrencilerin görsel modeller oluştururken en çok aritmetik stratejiler (62 modelden 51'i) kullandıklarını da göstermektedir. Ayrıca, öğrenciler problem çözmede görsel modeller kullandıklarında, çözümlerin çok sayıda durumda doğru olduğu görülmüştür (model ile 51 aritmetik kullanılan kelime probleminden 43'ü ve 11 cebirsel kullanılan kelime probleminden ise 10'u doğrudur). Öğrencilerin kullandığı temsil türünü de kaydettik. Az sayıda öğrenci (gerçekçi bağlamda 10, cebirsel bağlamda 1) detaylı çizimler ve şekiller oluşturmuş olup bunların hepsi gerçekçi bağlamdaydı.

Farklı bağlamlarda görsel modellerin oluşturulmaları arasında bir ilişki olup olmadığını araştırmak amacıyla bağlamdaki en az bir görevde model kullanan öğrencilerin cevaplarını ayırdık. *R'de Görseller, A'da Görseller* ve *G'de Görseller* değişkenlerini oluşturduk. On üç öğrenci bazı bağlamlarda model kullandı ve testteki görevleri çözerken 78 görsel temsil oluşturdular. Ki kare bağımsızlık testi, farklı bağlamlarda kullanılan modeller arasında güçlü bir ilişki olduğunu göstermiştir ($p < 0,017$, $\varphi \geq 0,5$, Tablo 8).

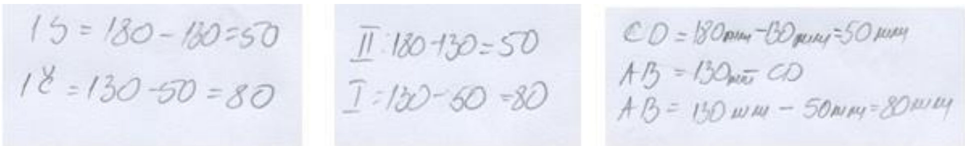
Tablo 8. Farklı bağlamlarda görsel temsillerin kullanımları arasındaki ilişkiyi araştırmaya yönelik Ki kare testinin sonuçları

R'de Görseller A'da Görseller			*R'de Görseller G'de Görseller*			*A'da Görseller G'de Görseller*		
$\chi^2(1, 78)$	p	φ	$\chi^2(1, 78)$	p	φ	$\chi^2(1, 78)$	p	φ
44,67	0,000	0,757	17,785	0,000	0,478	25,255	0,000	0,569

Tartışma

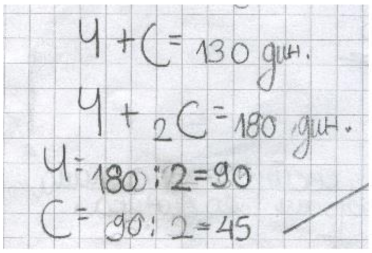
Geçmiş araştırmalar ve tarihsel gelişim, gerçekçi ve geometrik bağlamları, sözlü şekilde oluşturulmuş problemlerin çözümünü kolaylaştıran bağlamlar olarak kabul etmiştir (Nathan ve Koedinger, 2000; Sfard, 1995). Sonuçlarımız, bunun aksine, öğrencilerin araştırılan üç bağlamın tamamında (gerçekçi, aritmetik/cebirsel ve geometrik) eşit derecede başarılı olduklarını göstermektedir. Problemlerin yeniden yapılandırılması (bağlamsal değişim) öğrencilerin başarısında değişikliğe yol açmamış olup altı görevin her birinde üç farklı bağlamdaki doğru cevapların sayısında anlamlı bir fark yoktur (Tablo 2). Bu durum, her üç bağlamda da öğrencilerin problem çözme başarıları arasında orta ila güçlü bir ilişki olmasıyla da desteklenmektedir (Tablo 3). Bir başka deyişle, bir öğrenci, görevi, bir bağlamda doğru çözmüşse diğer bağlamlarda da doğru çözmüştür. Soru şudur: Problemleri çözen öğrenciler problemin yapısını doğru bir şekilde anlayıp onu farklı bağlamlarda tanıdılar mı, yoksa Verschaffel ve diğerlerinin (2000) araştırmasında olduğu gibi problem çözmede yüzeysel yöntemler mi (anahtar kelime yaklaşımı gibi) kullandılar? Öğrencilerin büyük bir bölümü (%77 ile %92 arasında, Tablo 2) ilk üç görevi doğru bir şekilde çözmüşlerdir. Daha önce de belirttiğimiz gibi, öğrencilerin ders kitaplarındaki problemler, ilk üç görevle benzer karmaşıklığa sahiptir. Bunlar anlamayı kolaylaştıran bir yapıya sahip olup ilgili ve ilgisiz bilgiler arasında fark oluşturur ve problem çözme için gerekli matematiksel prosedürleri belirlerler (Van der Schoot vd., 2009; Verschaffel vd., 2000). Bu argümanlara göre, ilk üç görevdeki yüksek başarının, kısmen, öğrencilerin problem çözmede kullandıkları yüzeysel yöntemlerin bir sonucu olduğunu ve bu durumun, bu tür bir yapıya ve karmaşıklığa sahip sorunların çözülmesinin kolay olduğuna dair geçmişteki bulguyu doğruladığını söyleyebiliriz (Boesen vd., 2010; Jonsson vd., 2014; Lithner, 2008).

Sonuçlarımız şaşırtıcı bir biçimde, farklı bağlamlardaki strateji seçimleri arasında çoğunlukla güçlü bir ilişki olduğunu göstermiştir (Tablo 4). Başka bir deyişle, öğrenciler gerçekçi, aritmetik/cebirsel ve geometrik bağlamda aynı çözme stratejilerini kullanmışlardır. Bağlamsal özellikleri dikkate alarak farklı strateji ve temsilleri esnek bir şekilde uygulama becerisini gösterememişlerdir (Elia vd., 2009; Heinze vd., 2009; Verschaffel vd., 2007). Bu sonucu, bir öğrencinin ilk görev üzerinde (Tablo 1) tüm bağlamlardaki (Şekil 1) çalışmasıyla göstereceğiz.



Şekil 1. İlk görevin (Tablo 1) bir öğrenci tarafından oluşturulan çözümü (gerçekçi, aritmetik/cebirsel ve geometrik bağlam)

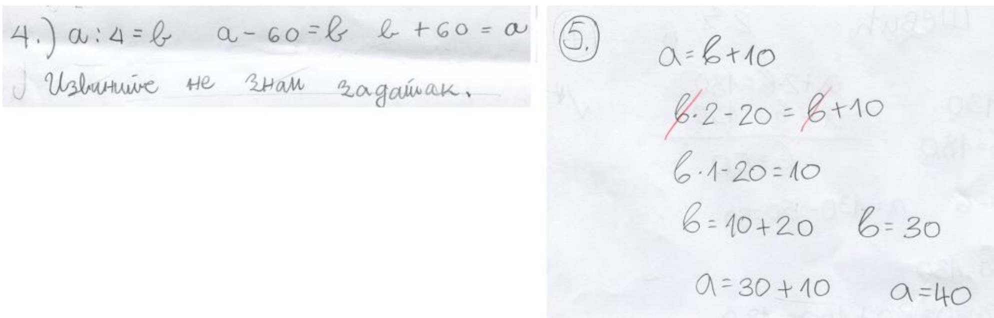
Bu çalışmanın teorik bölümünde, kelime problemlerini doğru çözmeyen öğrencilerin genellikle anahtar kelime yaklaşımını kullandıklarını savunmuştuk (De Corte vd., 2000; Verschaffel vd., 2000). Bu yaklaşımı Şekil 2'de verilen örnekle açıklayacağız.



Şekil 2. İlk görevin (Tablo 1) gerçekçi bağlamda yanlış çözümü

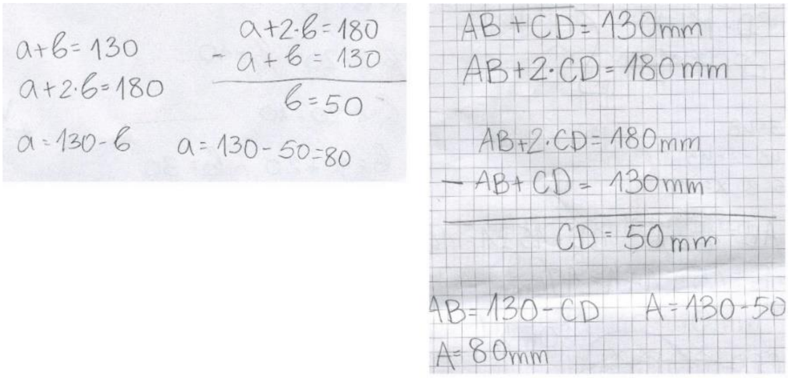
Çalışması Şekil 2'de sunulan öğrenci, "çikolata ve meyve suyu 130 dinardır" ve "çikolata ve iki meyve suyu 180 dinardır" şeklindeki ilişkileri doğru yazmıştır. Ancak, öğrenci "iki meyve suyu" unsuruna odaklanmış ve çikolata ile iki meyve suyunun bedelini ikiye bölmüştür. Öğrencinin durumsal modeli yanlış anlaması, elde edilen sonuç ile meyve suyu fiyatını ilişkilendirerek meyve suyu fiyatını elde etmek için tekrar 2'ye bölmesiyle de kendini göstermektedir. Dolayısıyla öğrenci, problem çözmeyi bazı nicel unsurların yüzeysel ilişkisine dayandırmıştır.

Problemlerin çoğunda, öğrencilerin problemleri çözmedeki başarısı, çözme stratejisinin seçimi ile ilişkili değildir (Tablo 5). Bu durumun istisnaları, 5. ve 6. görevler (Tablo 1) olup öğrencilerin bunları çözmedeki başarısı düşük seviyedeydi (5. görev için %19, 6. görev için %18). 4. görevin yanı sıra 5. ve 6. görevler de anında görülemeyen ilişkilere sahiptir ve verimli zihinsel modelin oluşturulması için ihtiyaç duyulan unsurların daha fazlasına sahiptir (Thevenot, 2010; Van der Schoot vd., 2009). Tablo 6'da gösterildiği gibi, bu problemleri çözmede kullanılan aritmetik stratejiler yanlış sonuçlara yol açmıştır. Bir öğrenci 5. veya 6. görevi çözerken aritmetik strateji seçmişse, bu öğrencinin elde ettiği sonuç vakaların %74'ünden fazlasında yanlıştır (Tablo 6). Öğrencilerin çözümlerinin analizinde iki temel yanıltıcı durumu ayırdık: Anahtar kelimeye dayalı yüzeysel stratejiyi uygulamak ve ilişkilerin yeterli ölçüdeki anlamını tanımadan bunları cebirsel sembolizmle temsil etmek (De Corte ve Verschaffel, 1991; Depaepe vd., 2010; Moore ve Carlson, 2012; Van den Heuvel-Panhuizen, 2005; Voyer, 2011). Son yaklaşımda öğrenciler, ilişkileri, cebirsel sembolizmi doğru kullanarak yazmış olsalar dahi problemi çözmek için bunları kullanmayı başaramamışlardır. Bu durum, öğrencinin sayılar arasındaki ilişkileri cebirsel sembolizm kullanarak doğru yazdığı, ancak çözüm yerine "Özür dilerim, problemi nasıl çözeceğimi bilmiyorum" notunu yazdığı Şekil 3'te (solda) gösterilmektedir. Modelleme sürecinin aşamalarını analiz ederek (Blum ve Leiss, 2007) öğrencilerin yeterli bir durumsal model geliştirdikleri sonucuna varabiliriz. Ancak öğrencilerin geliştirdiği, görsel temsillerin olmadığı matematiksel model yeterli değildi ve öğrencilerin matematiksel hesaplamaya devam etmesine olanak tanımamıştı. Öğrenciler, sunulan durumda, problemin, görsel şematik temsil gibi uygun bir zihinsel temsilini oluşturmadıkları için yeterli bir çözme stratejisi seçememişlerdi (De Corte ve Verschaffel, 1991; Depaepe vd., 2010; Moore ve Carlson, 2012; Voyer, 2011). Teorik arka planda, öğrencilerin, modelleme sürecinin, problem durumunun içsel bir modelinin oluşturulması ve durumsal bir modelin matematiksel bir modele dönüştürülmesi gibi bazı aşamalarını atlama eğiliminde oldukları savunulmaktadır (Blum ve Leiss, 2007; Schwarzkopf, 2007). İçsel bir model oluşturulmasının önemi, öğrencinin problemi cebirsel olarak çözebildiğini, ancak problem durumunun doğru içsel modelini oluşturmadığını gösteren Şekil 3'te (sağda) gösterilmiştir.



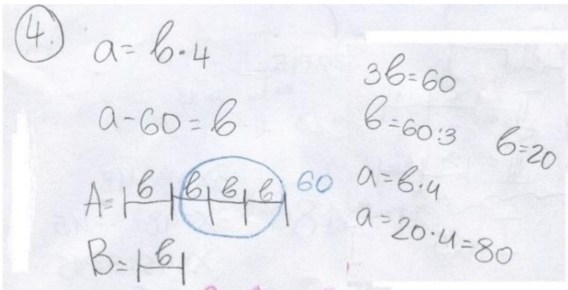
Şekil 3. 4. ve 5. görevi (Tablo 1) gerçekçi bağlamda çözme girişimlerinde cebirsel stratejilerin kullanımı

Şaşırtıcı bir biçimde, bazı öğrenciler, matematik eğitiminin ilk dört yılında müfredatta yer almayan cebirsel stratejilerde başarılıydılar. Yöntem bölümünde açıkladığımız gibi, Sırbistan'daki resmi matematik müfredatına göre öğrenciler, dördüncü sınıfın sonunda doğal sayı sistemindeki işlemler ve basit denklem biçimleri konusunda bilgili hale geliyorlardı. Ancak, bazı öğrenciler ilk dört sınıfa ait müfredatta yer almayan denklem sistemlerini yazmış ve çözmüştü. Öğrenciler, geometrik bağlamda aynı prosedürleri kullandılar. Öğrencilerin, problemdeki ilişkileri açıklamayı başararak yukarıda belirtilen prosedürleri başarıyla kullandığı ilk görevin aritmetik/cebirsel ve geometrik bağlamlarda çözümünü göstereceğiz (Şekil 4).



Şekil 4. Dördüncü görevi (Tablo 1) çözmede kullanılan cebirsel stratejiler

Geçmiş çalışmalar, modelleme sürecinde görsel model (Hegarty ve Kozhevnikov, 1999; Presmeg, 1997), özellikle de görsel şematik temsiller (Boonen vd., 2013, 2014; Depaepe vd., 2010; Mayer, 1985; Moore ve Carlson, 2012; Van Garderen, 2006; Voyer, 2011) oluşturmanın önemini vurgulamaktadır. Sonuçlarımız bu bulguları doğrulamaktadır. Görsel modeller oluşturan öğrenciler problem çözmede başarılıydı (Tablo 7). Öğrencilerin görsel bir temsil kullandığı 62 çözümden 53'ü doğruydu. Modellerin yaratılmasının, ilişkilerin tanınmasını ve çözme stratejilerinin seçimini kolaylaştırdığına dair görüşü de teyit ettik (Hegarty ve Kozhevnikov, 1999; Van Garderen, 2006; Van Garderen ve Montague, 2003). Öğrenciler modelleri oluşturduktan sonra çoğunlukla aritmetik stratejiler kullansalar da cebirsel çözme stratejilerini kullandıklarında da başarılı olmuşlardır (Tablo 7). Bunu 4. görevin bir çözümü ile göstereceğiz (Şekil 5).

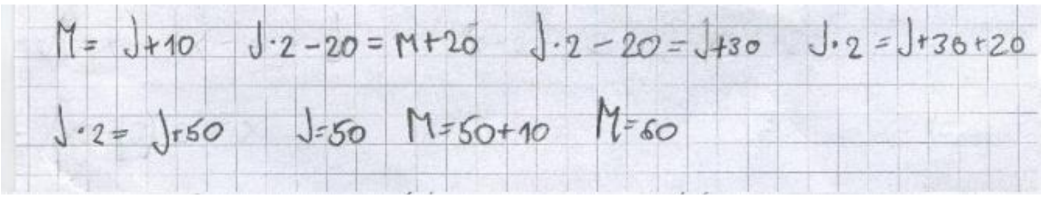


Şekil 5. Problem çözmede görsel bir model ile cebirsel stratejinin kullanımı (4. görev, Tablo 1, aritmetik/cebirsel bağlam)

Sonuçlarımız, aynı zamanda, görsel modelleri farklı bağlamlarda kullanan öğrencilerin sayılarında bir farklılık olmadığını ve farklı bağlamlardaki kullanımları arasında güçlü bir ilişki olduğunu da göstermektedir (Tablo 8). Bu şaşırtıcıdır, çünkü geometrik bağlam, görsel temsilleri kolaylaştıran bağlam olmalıdır. Problem çözmede modelleri kullanan öğrencilerin soyut görsel temsiller yaratması ve tüm bağlamlarda, ilişkileri temsil etmek için bir doğru parçası kullanması ilginçtir. Bu durum, geçmiş çalışmalarda da gösterildiği gibi (Ahmad vd., 2010; Blum ve Leiss, 2007; Hegarty ve Kozhevnikov, 1999; Presmeg, 1997; Van Garderen, 2006; Verschaffel vd., 2000) problemlerin başarıyla çözülmesini sağlamıştır. Az sayıda öğrenci (gerçekçi bağlamda 10, cebirsel bağlamda 1) gerçekçi bağlamda detaylı çizimler ve şekiller oluşturmuş olup öğrencilerin cevapları, problemin doğru çözümünü sağlamamış olan az sayıda resimsel temsil içeriyordu. Bu durum Boonen ve diğerlerinin (2014) çalışmasıyla tutarlıdır.

Bu çalışmanın teorik bölümünde, "kendi kendine oluşturulmuş bir model" (Gravemeijer, 2002; Van Dijk vd., 2003) veya "önceden oluşturulmuş bir temsil" (Diezmann, 2002) olabilecek olan problem çözmedeki başlangıç noktası ile ilgili soruya değinmiştik. Öğrencilerin kendi kendilerine oluşturdukları modeller yapmadıkları bu araştırmanın sonuçlarına dayanarak, bir modelin oluşturulmasının, öğrencilerin ve öğretmenin karşılıklı çalışmasını gerektiren bir süreç olduğunu savunan araştırmacıların (Ainsworth, 2006; Keijzer ve Terwel, 2003) görüşünü paylaşıyoruz.

Belirttiğimiz gibi, araştırmamızdaki öğrenciler basit görevlerde problem çözmede cebirsel ve aritmetik stratejileri uygulamada başarılıydılar. Ancak, yalnızca az sayıda öğrenci karmaşık görevleri resmi çözme yöntemleri kullanarak çözdü. Karmaşık bir görevde başarılı bir resmi yöntem örneği (5. görev, Tablo 1) Şekil 6'da sunulmuştur.



Şekil 6. Beşinci görevi (Tablo 1) çözmede kullanılan doğru cebirsel strateji

Sonuçlar, resmi çözme stratejilerinin okulun ilk yıllarında az sayıda öğrenci için kullanılabilir olduğuna dair görüşü doğrulamıştır (Boesen vd. 2010; Carpenter, Moser ve Bebout, 1988; Jonsson vd., 2014; Lithner, 2008; Verschaffel vd., 2000). Öğrenciler, çözmeleri gereken bir problemle karşılaştıklarında, geleneksel sembolizm ile geliştirilen gayriresmi yaklaşımlar arasındaki bağlantıyı kurmakta zorluk çekmişlerdir. Araştırmamızdaki öğrenciler, problem çözmede onlara yardımcı olabilecek farklı görsel modeller oluşturarak cebirsel sembolizmi daha basit hale getirmeye çalışmamışlardır.

Sonuç

Bu çalışmada, öğrenciler aynı matematiksel yapı ile farklı bağlamlarda sözlü şekilde oluşturulmuş problemler çözerken onların başarılarını, çözme stratejilerini ve görsel şematik temsillerini analiz ettik. Gerçekçi bir bağlamı olan kelime problemlerinin yanı sıra matematiksel ilişkilerin matematiksel dil ile ifade edildiği aritmetik/cebirsel ve geometrik bağlamlarda sözlü şekilde oluşturulmuş problemler kullandık. Kelime problemi çözme sürecinde durumsal modelin anlaşılmasının önemini vurgulayan çok sayıda araştırma vardır. Durumsal modellerin (aritmetik/cebirsel veya geometrik) anlaşılmasını gerektirmeyen bağlamlarda iki farklı sonuç beklemiştik: Öğrenciler daha başarılı olacaktı, çünkü gerçekçi bir durumda, unsurları ve ilişkileri anlamak zorunda değillerdi ya da öğrencilerin başarısı daha düşük olacaktı, çünkü gayriresmi çözme stratejilerini ve günlük deneyimleri kullanmalarına yardımcı olacak gerçekçi bir durum yoktu. Ancak, öğrencilerin bu üç bağlamdaki başarısında istatistiksel olarak önemli farklılıklar elde etmedik. Bu sonucu kısmen, öğrencilerin, problem çözmede, anahtar kelime yaklaşımı gibi yüzeysel stratejiler kullanmalarına bağlayabiliriz. Araştırmamızda öğrenciler, ilişkilerin anında görülebildiği görevleri doğru bir şekilde çözebildiler, ancak daha karmaşık görevlerde, yüzeysel stratejiler onları doğru çözümlere götürmedi.

Diğer yandan, farklı bağlamlarda başarıda farklılık olmaması, kullanılan strateji ve görsel modellerde farklılık olmamasıyla açıklanabilir. Sözlü şekilde oluşturulmuş bir problemdeki gerçekçi bir durum, problem çözmede gayriresmi aritmetik stratejilerin daha sık kullanılmasıyla sonuçlanmamıştır. Öğrenciler, daha karmaşık matematiksel yapıya sahip problemleri temsil etmek için cebirsel sembolizm kullanmışlardır. Ancak, bu görevlerdeki başarı oranı düşüktü, bu nedenle öğrencilerin çoğunun resmi cebirsel stratejileri kullanamadığı veya bazı aritmetik stratejileri verimli bir şekilde uyarlayamadığı sonucuna varabiliriz.

Benzer şekilde, görsel modellerin farklı bağlamlarda kullanımında da bir fark yoktu. Bu sonuca dayanarak, bu eğitim düzeyindeki öğrencilerin kelime problemleri (gerçekçi bir bağlamı olan problemler) çözerken modelleme sürecinde bir aşama olarak görsel temsilleri kullanamadıklarını düşünüyoruz. Öğrenciler geometrik bağlamda problem çözerken görsel şematik temsiller (geometrik resimler) kullanmazlarsa bunları aritmetik/cebirsel bağlamda veya modelleme sürecinde bir aşama olarak da kullanmalarını bekleyemeyiz. Dolayısıyla, geometrik bağlamda görsel temsillerin oluşturulması sürecine daha çok önem verilmelidir. Böylece, öğrencilerin diğer bağlamlarda problem çözmedeki başarılarında bir artış olabileceğini düşünüyoruz.

Öğrenciler, dört yıllık matematik eğitimi ve resmi yöntemlerle problem çözme deneyiminden sonra görselleştirmeyi, problem çözmenin erişilebilir bir yolu -ve aşaması- olarak görmezden gelmektedirler. Bu sonuca dayanarak, problem çözme sürecinde strateji ve model seçiminin esnekliği ve uyarlanabilirliğinin ancak bunların sistematik öğretimi ile geliştirilebileceği sonucuna varabiliriz. Çeşitli zihinsel temsilleri teşvik edebilecek farklı bağlamlar açıkça öğretilmeden bunların kullanılmasına neden olmayacaktır. Bu durum, model kullanarak problem çözmenin eğitimin ilk yıllarında matematik müfredatının bir parçası olması gerektiğini düşünen araştırmacıların görüşüyle tutarlı olup (Aztekin ve Taşpınar Şener, 2015; Elia vd., 2009; Şahin ve Eraslan, 2016; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003; Van Dijk vd., 2003) ilköğretim düzeyinde modellemeye yönelik yöntemsel yaklaşımlarla ilgili daha detaylı araştırmalara ihtiyaç duyulmaktadır (Aztekin ve Taşpınar Şener, 2015). Öğrencilere sunulan veya ortak olarak oluşturulmuş temsillerin kullanımı (Ainsworth, 2006; Diezmann, 2002; Keijzer ve Terwel, 2003; Van Garderen, 2006), öğrenciler problemleri sembolik olarak nasıl çözeceklerini bilseler dahi matematik öğretiminin açık bir hedefi haline gelmelidir. Öğrenciler, daha karmaşık problemlerle karşı karşıya geldiklerinde, modelleme becerileri çoktan gelişmiş olmalıdır. Modellerin kendilerinin oluşturulması, yalnızca bir problem çözme aracı değil, öğretim uygulaması için bir görev olmalıdır. Öğretmenler, odak noktalarını, yalnızca bir problemin matematiksel yapısını resmi matematik diliyle açıklamaktan durumsal modeli anlamaya ve onu görsel şematik temsiller yoluyla temsil etmeye kaydırmak suretiyle matematik problemlerine yönelik tutumlarını değiştirmelidirler.

Kaynakça

Ahmad, A., Tarmizi, R. A. ve Nawawi, M. (2010). Visual representations in mathematical word problem solving among form four students in Malacca. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 8, 356-361.

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*(3), 183-198.

Aztekin, S. ve Taşpınar Şener, Z. (2015). The content analysis of mathematical modelling studies in Turkey: A meta-synthesis study. *Education and Science, 40*(178), 139-161.

Blum, W. ve Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. C. Haines, P. Galbraith, W. Blum ve S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling: Education, engineering, and economics* içinde (s. 222-231). Chichester: Horwood.

Boesen, J., Lithner, J. ve Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics, 75*(1), 89-105.

Boonen, A. J. H., Van der Schoot, M., Van Wesel, F., De Vries, M. H. ve Jolles, J. (2013). What underlies successful word problem solving? A path analysis in sixth grade students. *Contemporary Educational Psychology, 38*(3), 271-279.

Boonen, A. J. H., Van Wesel, F., Jolles, J. ve Van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research,* 68, 15-26.

Carpenter, T. P., Moser, J. M. ve Bebout, H. C. (1988). Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(4), 345-357.

De Corte, E. ve Verschaffel, L. (1991). Some factors influencing the solution of addition and subtraction word problems. K. Durkin ve B. Shire (Eds.), *Language and mathematical education* içinde (s. 117-130). Milton Keynes: Open University Press.

De Corte, E., Verschaffel, L. ve Greer, B. (2000). Connecting mathematics problem solving to the real world. A. Rogerson (Ed.), *International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Mathematics for living location* içinde (s. 66-73). Amman, Jordan: The National Center for Human Resource Development.

Depaepe, F., De Corte, E. ve Verschaffel, L. (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher Education, 26*(2), 152-160.

Diezmann, C. M. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom, 7*(3), 4-8.

Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M. ve Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 41*(5), 605-618.

English, L. (2009). Promoting interdisciplinarity through mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education, 41*(1-2), 161-181.

Gravemeijer, K. (1997). Solving word problems: A case of modelling?. *Learning and Instruction, 7*(4), 389-397.

Gravemeijer, K. (2002). Preamble: From models to modeling. K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Oers ve L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* içinde (s. 7-22). Dordrecht: Kluwer.

Hegarty, M. ve Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684-689.

Heinze, A., Star, J. R. ve Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 41, 535-540.

Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y. ve Lithner, J. (2014) Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 36, 20-32.

Keijzer, R. ve Terwel, J. (2003). Learning for mathematical insight: A longitudinal comparative study on modelling. *Learning and Instruction, 13*(3), 285-304.

Kozhevnikov, M., Hegarty, M. ve Mayer, R. E. (2002). Revising the visualizer-verbalizer dimension: Evidence for two types of visualizers. *Cognition and Instruction, 20*(1), 47-77.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.

Mayer, R. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. E. A. Silver (Ed.), *Learning and teaching mathematical problem solving: Multiple research perspectives* içinde (s. 123-138). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Montague, M. ve Applegate, B. (2000). Middle school students' perceptions, persistence, and performance in mathematical problem solving. *Learning Disability Quarterly, 23*(3), 215-227.

Moore, K. C. ve Carlson, M. P. (2012). Students' images of problem contexts when solving applied problems. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 48-59.

Nathan, M. ve Koedinger, K. (2000). Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 168-190.

Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* içinde (s. 299-312). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Schwarzkopf, R. (2007). Elementary modelling in mathematics lessons: The interplay between "real-world" knowledge and "mathematical structures". W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn ve M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* içinde (s. 209-216). New-York: Springer.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 15-39.

Şahin, N. ve Eraslan, A. (2016). Modeling processes of primary school students: The crime problem. *Education and Science, 41*(183), 47-67.

Terwel, J., Van Oers, B., Van Dijk, I. M. A. W. ve Van den Eeden, P. (2009). Are representations to be provided or generated in primary mathematics education? Effects on transfer. *Educational Research and Evaluation, 15*(1), 25-44.

Thevenot, C. (2010). Arithmetic word problem solving: Evidence for the construction of a mental model. *Acta Psychologica, 133*(1), 90-95.

Van Ameron, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 63-75.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 9-35.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 25*(2), 2-23.

Van der Schoot, M., Bakker Arkema, A. H., Horsley, T. M. ve Van Lieshout, E. D. C. M. (2009). The consistency effect depends on markedness in less successful but not successful problem solvers: An eye movement study in primary school children. *Contemporary Educational Psychology, 34*(1), 58-66.

Van Dijk, I. M. A. W., Van Oers, B. ve Terwel, J. (2003). Providing or designing? Constructing models in primary maths education. *Learning and Instruction, 13*(1), 53-72.

Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities, 39*(6), 496-506.

Van Garderen, D. ve Montague, M. (2003). Visual-spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 18*(4), 246-254.

Verschaffel, L. ve De Corte, E. (1990). Do non-semantic factors also influence the solution process of addition and subtraction word problems?. H. Mandle, E. De Corte, N. Bennett ve H. F. Friedrich (Ed.), *Learning and instruction. European research in an international context*. *Volume 2.2: Analysis of complex skills and complex knowledge domains* içinde (s. 415-429). Oxford: Pergamon.

Verschaffel, L., Depaepe, F. ve Van Dooren, W. (2014). Word problems in mathematics education. S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* içinde (s. 641-645). Dordrecht, the Netherlands: Springer.

Verschaffel, L., Greer, B. ve De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., Greer, B. ve De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* içinde (s. 557-628). Greenwich. CT: Information Age Publishing.

Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W. ve Mukhopadhyay, S. (Ed.). (2009). *Words and worlds modelling verbal descriptions of situations.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Verschaffel, L., Van Dooren, W., Greer, B. ve Mukhopadhyay, S. (2010). Reconceptualising word problems as exercises in mathematical modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(1), 9-29.

Voyer, D. (2011). Performance in mathematical problem solving as a function of comprehension and arithmetic skills. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(5), 1073-1092.