Eğitim ve Bilim

Cilt 41 (2016) Sayı 183 233-249

tedmem

İlişkilendirme Becerisinin Matematik Öğretiminde Kullanımının Geliştirilmesi İçin Kavramsal Çerçeve Önerisi *

Erhan Bingölbali [1], Medine Coşkun [2]

Öz

Bu çalışmanın amacı matematik derslerinde ilişkilendirmenin nasıl yapılabileceğine dair bir kavramsal çerçeve ortaya koymaktır. Çalışmada öncelikle hem matematik hem de matematik eğitimi açısından ilişkilendirmenin önemi üzerinde durulmuştur. Daha sonra matematik eğitiminde ilişkilendirmenin genel olarak hangi anlamda ele alındığı açıklanmıştır. Devamında, ilişkilendirme becerisinin operasyonel hale getirilmesine katkı sunmak amacıyla, bu becerinin dört ana bileşenden oluştuğu ortaya konulmuştur; i.)kavramlar arası ilişkilendirme, ii.) farklı gösterimler arasında ilişkilendirme, iii.) gerçek hayatla ilişkilendirme ve iv.) farklı disiplinlerle ilişkilendirme. Her bir bileşen örneklerle açıklanmış ve sonrasında bu bileşenlerin birbiriyle ilişkileri irdelenmiştir. Çalışma bu kavramsal çerçevenin matematik öğrenimi ve öğretimi açısından sağladığı faydalar hakkındaki tartışma ve ileri araştırmalara dönük sonuç ve öneri kısımları ile sonlandırılmıştır.

Anahtar Kelimeler

Matematik öğretiminde ilişkilendirme

İlişkilendirme becerisi

Farklı disiplinlerle ilişkilendirme

Farklı gösterimler arasında ilişkilendirme

Makale Hakkında

Gönderim Tarihi: 18.06.2015

Kabul Tarihi: 08.12.2015

Elektronik Yayın Tarihi: 17.02.2016

DOI: 10.15390/EB.2016.4764

Giriş

Matematiksel nesneler arasındaki ilişkileri ortaya koyma, bunlardan hareketle genellemeler yapma ve bu genellemeleri ispatlama süreci matematik disiplininin temel karakteristik özelliğidir (Yıldırım, 1996).Bu bakış açısı matematiğin genelde ardışık ve yığmalı bir disiplin olarak nitelendirilmesine yol açmıştır. Ardışık ve yığmalıdan kasıt matematiksel kavram ve sistemlerin birbirleri üzerine kurulması, ilişkili olması ve gerek kavramların tanımlanmasında gerekse sistemlerin inşasında önceki bilgi ya da kavramların kullanılmasıdır. Örneğin üçgenin inşası; nokta, doğru parçası, doğru, açı gibi matematiksel kavramların birbirleriyle ilişkilendirilmesini gerekli kılmaktadır. Ayrıca üçgen çokgenler sisteminin de bir parçasıdır. Dolayısıyla ardışık ve yığmalı olmanın matematik eğitimine bakan yönü, esasında kavramlar arasında ilişki kurma ve ilişkilendirmedir.

Matematik tarihi matematik disiplinin gelişiminde de ilişkilendirmenin son derece önemli bir yer tuttuğunu göstermektedir. İlişkilendirmenin matematik tarihinde anıtsal düzeyde görüldüğü yer ise analitik geometridir. Borceux'un (2014) ifade ettiği gibi, 1600'lü yıllara kadar geometrik

* Bu çalışma birinci yazarın danışmanlığında yürütülen ikinci yazarın yüksek lisans tez çalışması kapsamında kullanılan kavramsal çerçevenin güncellenmesi ile ortaya çıkmıştır. Bu çalışma ayrıca Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumunda (TÜRKBİLMAT 2) bildiri olarak sunulmuştur.

[1] Gaziantep Üniversitesi, Gaziantep Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi, Türkiye, erhanbingolbali@yahoo.co.uk

[2] MEB, Şanlıurfa İl Milli Eğitim Müdürlüğü, Türkiye, medinecoskun00@gmail.com

problemlerin çözümü genelde cetvel-pergel kullanmayı gerektiren ve Yunan matematikçilerden miras kalan yöntemlerle yapılmaktaydı. Geometri problemlerinin bu araçlar ve yöntemlerle çözülmesi oldukça güçtü. Fermat ve Decscartes'in 1630'lu yıllarda birbirilerinden bağımsız olarak analitik geometriyi matematik disiplinine yeni bir alan olarak kazandırması (Borceux, 2014), geometrideki problemlerin cebirsel sembol ve metotlarla temsil edilmesine ve dolayısıyla problemlerin daha etkin bir şekilde çözülmesine imkan tanımıştır. Matematiğin iki alanının ilişkilendirilmesiyle ortaya çıkan analitik geometri daha sonraları ayrıca 1670'li yıllarda Newton ve Leibniz'in önemli katkılarıyla insanlık tarihini derinden etkileyecek olan Kalkulus'un da ortaya çıkmasına ve gelişmesine yol açmıştır.

Matematiğin doğasında yer alan ve matematik disiplininin gelişmesinde kilit bir role sahip olan ilişkilendirme matematik öğrenimi ve öğretiminde de son derece önemli olup, matematik öğretimi sürecinde öğrencilere kazandırılması hedeflenen temel becerilerdendir (NCTM, 2000). Bu beceri her ne kadar matematik eğitimi literatüründe ağırlıklı olarak sadece öğrenciye kazandırılması gereken bir beceri olarak ele alınsa da öğretmenin sınıf içinde ilişkilendirme yapıp yapmadığı, aynı zamanda ilişkilendirmenin nasıl yapıldığı da büyük önem taşımaktadır. Tchoshanov (2011) öğretmenin kavramlar ve ilişkileri ile ilgili bilgisinin öğrencilerin başarı ve ders kalitesinde etkili olduğunu belirtmektedir. Ayrıca Tchoshanov (2011) bu bilginin başarılı bir öğretmen olmak için belirleyici bir unsur olduğuna da işaret etmekte ve istenilen kazanımlara ulaşmada süreci yönetecek öğretmenlere önemli görevlerin düştüğünü ifade etmektedir. Ancak ilgili literatür incelendiğinde ilişkilendirmenin ne olduğu ve öğrencilere bu becerinin nasıl kazandırılacağına dair kapsamlı bir kavramsal çerçevenin olmadığı görülmektedir. Bu çalışma özelinde ilişkilendirme becerisi için bileşenler belirlenerek öğretmenlerin matematik öğretiminde bu beceriyi nasıl kazandırabileceklerine yardımcı olmak üzere bir kavramsal çerçevenin sunulması amaçlanmıştır. Dolayısıyla, bu kavramsal çerçeve ile hem ilişkilendirme becerisinin muhtevası irdelenmeye çalışılmış hem de öğretmenlere rehberlik edecek bir ilişkilendirme yapma aracı sunulmuş olacaktır.

Matematik Eğitiminde İlişkilendirme Becerisi

Matematik eğitimi literatürüne bakıldığında, ilişkilendirme kavramının genelde iki ana tema altındaki çalışmalarda kullanıldığı görülmektedir. Bunlardan ilki *anlama*, diğeri ise *beceri* temasıdır. İlk tema kapsamında açıkça ifade edilmese de ilişkilendirme kavramı ilişkisel düşünme ve ilişkisel anlama ile ilgili olarak ele alınmaktadır (Carpenter, Franke ve Levi, 2003; Carpenter, Levi, Franke, Zeringue, 2005; Empson, Levi ve Carpenter, 2010; Hunter, 2007; Presmeg, 2006; Skemp, 1976). İlişkisel anlama özelikle Skemp'in (1976) çalışmalarıyla matematik eğitimi literatüründe ön plana çıkmış ve matematiksel anlama *ilişkisel anlama* ve *işlemsel anlama* olarak ikiye ayrılmıştır. Skemp (1976) ilişkisel anlamayı gerçekleştirilen bir matematiksel işlemin nedeni ile birlikte bilinmesini kapsayan bir anlama olarak tanımlamış, kavramsal ilişkiler ağı ile ilişkilendirmiş ve bu anlama türünün bir kavramın hem kendi özelliklerinin hem de diğer kavramlarla ilişkisinin anlaşılmasını içerdiğini ifade etmiştir. Örneğin, noktada türev kavramının; i.) bir fonksiyona bir noktada çizilen teğetin eğimi, ii.) fonksiyonun o noktadaki anlık değişim oranı veya iii.) o noktadaki farkların oranının limiti olarak anlamlandırılması, türev kavramına ilişkin ilişkisel anlama olarak ele alınabilir. Türev kavramının ayrıca ters-türev (yani integral), limit ve fonksiyon kavramı ile ilişkisinin bilinmesi de ilişkisel anlamaya örnek gösterilebilir. Benzer olarak, karenin özel bir dikdörtgen olarak bilinmesi de ilişkisel anlamanın olduğunu gösterir. Skemp (1976) bu şekildeki bir ilişkisel anlama ile anlamlı ve zengin öğrenmenin mümkün olacağını ifade etmiş ve öğretimde işlemsel anlama ile birlikte ilişkisel anlamanın üzerinde durulması gerektiğini vurgulamıştır.

Skemp (1976), işlemsel anlamayı ise gerekçelerini bilmeden kurallarla işlem yapma ve bu kuralları uygulama yeteneği olarak ifade etmiştir. Örneğin, $1{:}\frac{1}{2}$ bölme işleminin sonucunu ikinci kesri ters çevirip birinci ifade ile çarpıp $(1x\frac{2}{1})$ sonuca ulaşan bir öğrencinin kesirlerde bölme işleminin anlamını tam olarak bildiği söylenemez. Zira burada ilişkisel anlama bir bütünün (1) içerisinde kaç adet yarım (½) olduğunun bilinmesini gerektirir ki, o da 2 olacaktır. Benzer şekilde $f(x) = x^2$

fonksiyonun türevini $f'(x) = 2x$ olarak bulup, bunlar arasındaki ilişkinin anlamının bilinmemesi de işlemsel anlamaya örnek olarak gösterilebilir.

Skemp'in (1976) ilişkisel anlama olarak nitelendirdiği anlama biçimi aslında beraberinde ilişkisel düşünmeyi de getirmektedir. İlişkisel düşünme ilişkisel anlamayla yakından ilişkili olup, düşünsel boyutta zihnin çalışma biçimidir. İlişkisel anlama ve düşünme aynı zamanda matematik öğrenme ve öğretim sürecince sıkça ön plana çıkan kavramsal anlama (Hiebert ve Lefevre, 1986) ve anlamlı öğrenme (Ausubel, 1968) ile de yakından ilgilidir.

İlişkisel ve kavramsal anlama kavramlarının sayesinde, ilişkilendirme bir beceri ya da standart olarak matematik öğretim programlarının önemli bir öğesi haline gelmiştir. Matematiğin hem kendi içinde hem de diğer alanlarla ilişkisi kurulduğunda, çocuklarda daha kalıcı öğrenmelere yol açacağı öngörülmüş (NCTM, 2000) ve dolayısıyla ilişkilendirme becerisi matematik öğrenimi ve öğretiminde özellikle ön plana çıkarılmıştır. Burada gündeme gelen temel soru ise şudur: peki ilişkilendirme becerisi ne anlama gelmektedir? İlgili literatüre bakıldığında ilişkisel anlama ile ilişkili olacak şekilde bazı tanımlamaların özellikle politika belirleyici dokümanlarda ortaya çıktığı görülmektedir. Örneğin NCTM (2000) süreç standartlarında ilişkilendirme kapsamında öğrencilerden aşağıdakileri göstermeleri beklenmektedir:

- *Matematiksel fikirler arasındaki ilişkilerin farkına varıp, bunları kullanmaları,*
- *Matematiksel fikirlerin bir diğeriyle ilişkisini ve bu ilişkilerle yeni fikirlerin inşa edilip tutarlı bir bütün haline nasıl getirilebileceğini anlamaları,*
- *Matematik dışındaki diğer disiplinlerde matematiği belirlemeleri ve uygulamaları*

NCTM (2000) perspektifine paralel olarak, 2013 yılında güncellenen 5-8. Sınıflar ortaokul matematik öğretim programında ilişkilendirme becerisi için aşağıdaki gibi bir açıklama yapılmıştır:

> *Matematikle diğer disiplinler ve yaşam arasında da ilişkiler bulunmaktadır. Buna bağlı olarak ilişkilendirme becerisi, matematik kavramlarının kendi aralarında da, bir matematiksel kavramın diğer disiplinlerle ve günlük hayatla ilişkilendirilmesini kapsamaktadır. Ayrıca matematiksel işlemlerin tüm bunların temelinde yatan kavramlarla da ilişkilendirilmesi önemsenmektedir* (MEB, 2013, s.5).

Şimdiye kadar sunulanlar incelendiğinde, ilişkilendirme becerisi için ortak bazı bileşenlerin (gerçek hayat ile ilişkilendirme gibi) ön plana çıktığı görülmektedir. Ancak ilişkilendirme becerisinin ne anlama geldiğinin daha iyi anlaşılması için, sistematik bir şekilde ele alınmasına ihtiyaç duyulmaktadır. İlgili literatürden de faydalanılarak (NCTM, 2000; MEB, 2013), bu çalışma kapsamında ilişkilendirme becerisinin dört ana bileşenden oluştuğu ortaya konulmuştur. Bu bileşenler birlikte ilişkilendirme becerisinin muhtevasını oluşturmakta olup, bu çalışmada ilişkilendirmenin nasıl tanımlandığını da göstermektedir. Dört bileşen aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 1. İlişkilendirme Becerisi İçin Kavramsal Çerçeve

a.) Kavramlar arası ilişkilendirme
a_1. Kavramla diğer kavramlar arasında ilişki kurma
a_2. Kavram ile alt kavramları ve alt kavramların kendi arasında ilişki kurma
b.) Kavramın farklı gösterimleri arasında ilişkilendirme
c.) Gerçek hayatla ilişkilendirme
c_1. Kavramı bir bağlam içerisinde ele alma
c_2. Gerçek hayattan sözel örnek verme
d.) Farklı disiplinlerle ilişkilendirme
d_1. Kavramı farklı bir disiplin bağlamı içerisinde ele alma
d_2. Farklı disiplinlerle ilişkilendirmenin sözel örneklerle ifade edilmesi

Aşağıda her bir bileşeninin ne anlama geldiği sırasıyla açıklanarak, ilişkilendirme becerisinin muhtevası oluşturulmuştur. Ancak bileşenlerin ne anlama geldiği hakkında bilgi vermeden önce bileşenlerde kullanılan kavram ifadesiyle neyin kastedildiğinin açıklanmasında fayda görülmektedir. Türev, fonksiyon ve oran gibi tanımı da olan kavramlar bu çalışma kapsamında doğrudan kavram olarak ele alınmıştır. Bununla birlikte matematik öğretimi son derece dinamik ve karmaşık olup, ana kavramların dışında da birçok matematiksel fikri, kuralı, ifadeyi ve prosedürü kullanmayı gerektirmektedir. Hiebert ve diğerleri (2003) matematiksel fikirler, kurallar ve prosedürler arasında kurulması öngörülen ilişkileri ilişkilendirme yapma çerçevesinde değerlendirmişlerdir. Bu çalışmada, $y = 2x + 1$ doğrusu ve $f(x) = x^2$ fonksiyonu gibi matematiksel kurallar ve prosedürler arasında da ilişkilendirme yapılabileceği için, daha kolay bir iletişim olması açısından bu matematiksel ifadeler de kavram ifadesi kapsamında değerlendirilmiştir.

1. Kavramlar Arası İlişkilendirme

Matematik sürekli yeni ilişkilerin araştırıldığı ve bu ilişkilerin ispatlandığı bir disiplindir. Bu süreçte kavramlar arası ilişki ve ilişkilendirme kaçınılmazdır. Matematiğin inşasındaki bu yapı matematik öğrenimi ve öğretimi için de geçerlidir. Yeni bir kavram öğrenimi öğrenilen ya da önbilgi haline gelmiş kavramlarla bağlantının kurulmasını gerekli kılmaktadır. Bu nedenle yeni bir konuya geçiş yapılmadan önce önbilgilerin çok iyi analiz edilmesi gerekir (Hasemann ve Mansfield, 1995). Bu ön bilgilerden bazıları kavramın ilişkili olduğu diğer kavramlardır. Öğretim programlarının hazırlanması ve kazanımların yerlerinin belirlenmesinde de bu hususa özellikle dikkat edilmektedir.

İlgili literatüre de bakıldığında matematiksel bir kavramın öğretim sürecinde kavramlar arası ilişkilendirme yapmanın önemi vurgulanmaktadır (MEB, 2013; NCTM, 2000; Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2012). Kavramlar arası ilişkilendirmeye genelde kavramsal anlama, ilişkisel anlama ve kavram haritaları başlıkları altında yapılan çalışmalarda rastlanılmaktadır (Baki ve Şahin, 2004; Carpenter vd., 2005; Empson vd., 2010; Johnson, Seigler ve Alibali, 2001; Skemp, 1976; Watson, 2004). Kavram haritaları kavramların ilişkilendirilmesini (Hasemann ve Mansfield, 1995; Williams, 1998), kavramsal ve ilişkisel anlama ise kavramlar arası ilişkiler ağının kurulmasını gerekli kıldığından kavramlar arası ilişkilendirmeye bu temalar altında yapılan çalışmalarda karşılaşmak olağandır.

Bu çalışma kapsamında kavramlar arası ilişkilendirme, ilişkilendirme becerinin bir bileşeni olarak ele alınmakta ve iki alt-bileşenden oluştuğu kabul edilmektedir. İlgili literatürde bu türden herhangi bir ayrım olmamasına rağmen kavramlar arası ilişkilendirmenin daha iyi anlaşılması için bu ayrımın yapılmasına gidilmiştir.

- Kavramla diğer kavramlar arasında ilişki kurma
- Kavram ile alt kavramları ve alt kavramların kendi arasında ilişki kurma

1.1. Kavramla Diğer Kavramlar Arasında İlişki Kurma

Kavramla diğer kavramlar arasında ilişki kurma; bir matematiksel kavramın veya ifadenin farklı matematiksel kavramlarla ilişkilendirilmesidir. Özdeşliklerin öğretiminde, alan kavramı ile ilişkilendirilme yapılması bu bileşen için örnek olarak gösterilebilir. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ özdeşliğinin öğretiminde kenar uzunluğu $a + b$ birim olan karenin alan hesabı yapılarak, ortaya çıkan alanın özdeşliğe eşit olması ile farklı kavramlar arasında ilişkilendirme yapılmış olmaktadır. Dolayısıyla örnekte görüldüğü gibi cebirsel bir kavramın öğretiminde geometrik bir kavram olan alan kavramından faydalanılabilir. Benzer bir örnek türev ve integral ilişkisi için de verilebilir. İntegral alma işleminin aslında türevi alınmış bir fonksiyonun ilkelini (ilk halini) bulma ve dolayısıyla integralin anti-türev olması iki kavram arasındaki ilişkiye veya ilişkilendirmeye örnektir. Ayrıca bir dikdörtgenin köşegeni yardımıyla iki bölgeye ayrılması ve buradan dik üçgenin alan bağıntısının oluşturulması da iki kavram arasındaki ilişkilendirmeye başka bir örnektir.

Matematik disiplini ardışık yığmalı ve doğası gereği kavramlar arası ilişkiler üzerine kurulu olduğu için, kavramlar arası ilişkilendirme olağan görülebilir. Fakat yukarıda verilen özdeşlik örneğinde görülebileceği gibi alan ve bir cebirsel ifade olan özdeşlik birbiriyle ilişkilendirilerek ele alındığında çok daha anlamlı bir öğrenme gerçekleştirilebilmektedir. Dolayısıyla matematiğin doğasında var olan ilişkilendirme, bu çalışma kapsamında kavramların diğer kavramlarla ilişkisi başlığı altında ele alınarak söz konusu ilişkilendirmenin pratikte ortaya çıkması gerekliliğine dikkat çekilmektedir.

1.2. Kavram ile Alt Kavramları ve Alt Kavramların Kendi Arasında İlişki Kurma

Daha genel bir özelliğe sahip bir kavramın kendi alt kavramları ile ilişkisi ve bu kavrama ait alt kavramların yine kendi aralarındaki bağlantısı bu bileşen kapsamında değerlendirilmektedir. Bu alt-bileşen için üçgen kavramını örnek olarak ele alalım. Üçgenler açılarına ve kenarlarına göre olmak üzere iki ana başlık altında sınıflandırılmaktadır. Üçgenler açılarına göre; dar açılı, geniş açılı ve dik açılı ve kenarlarına göre ise ikizkenar, eşkenar ve çeşitkenar olarak sınıflandırılmaktadır. Bu sınıflandırmalar ile üçgene ilişkin yeni alt kavramlar ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla burada daha genel olan üçgen ile onun alt kavramı olan geniş açılı üçgen ilişkisinin varlığı söz konusudur. Diğer taraftan, dar açılı üçgen ile eşkenar üçgen ilişkisinin kurulması ve dolayısıyla her eşkenar üçgenin aslında bir dar açılı üçgen olduğunun ortaya konulması kavramın kendi alt kavramları arasında kurulan ilişkiye örnektir. Benzer şekilde ikizkenar bir üçgenin hem dik açılı, hem geniş açılı hem de dar açılı olabilmesi de bu bileşen kapsamında değerlendirilmektedir.

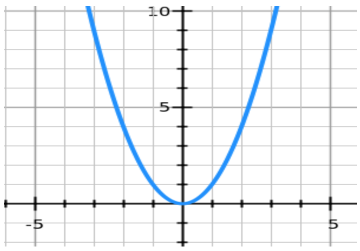
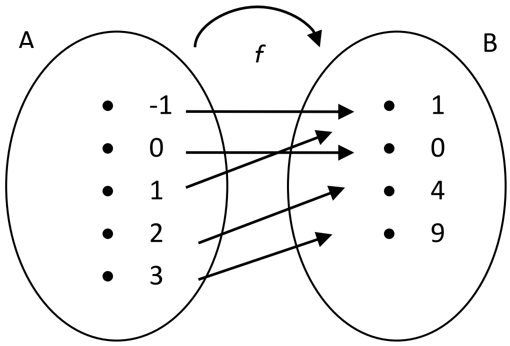
2. Kavramın Farklı Gösterimleri Arasında İlişkilendirme

Gösterim bilgisi NCTM (2000) tarafından süreç standartlarından biri olarak kabul edilmektedir. İlişkilendirme becerisi ile de yakından ilişkili olduğundan, kavramın farklı gösterimleri arasında bağlantı kurma bu çalışmada ilişkilendirme becerisinin bir bileşeni olarak ele alınmaktadır. Farklı gösterimler ve ilişkilendirme becerisi bağlantısı önemlidir, çünkü bir kavramın farklı temsillerle gösterilmesi kavramın anlamlı bir şekilde anlaşılması ve zihindeki kavrama ilişkin ağın zenginleşmesine yardımcı olmaktadır. Bu sürecin sonunda da ilişkisel anlamanın gerçekleşmesi mümkün hale gelebilmektedir (Van de Walle vd., 2012, s. 27).

Farklı gösterimler ve bunlar arasındaki dönüşümlerin önemine ilgili literatürde de sıkça değinilmektedir (Ainsworth, 1999; Lesh ve Doerr, 2003; Ainsworth ve Van Labeke, 2004; Bingölbali, 2010; Duncan, 2010; Van de Walle vd., 2012). İlgili literatüre bakıldığında bazı gösterim türlerinin özellikle ön plana çıktığı görülmektedir: i.) sözel ifade, ii.) somut cisimler (sayı pulları, kesir çubukları, gerçek modeller, vb), iii.) resimler veya diyagramlar (sayı doğrusu, alan modeli, vb), iv.) yazılı semboller, v.) tablolar, vi.) grafikler, vii.) denklem ve viii.) şekiller. Üst düzey matematikte daha farklı gösterimler de söz konusu olabilir. Bu gösterimler ve aralarındaki bağlantılar bu çalışmada ilişkilendirme becerisi kapsamında düşünülmekte ve bu becerinin gelişmesi aynı zamanda farklı gösterimlerin bağlantılarının etkin bir şekilde kurulmasına bağlı olduğu kabul edilmektedir.

Üzerinde çalışılan kavrama göre gösterimler farklılık gösterebilir. Örneğin kesir kavramı için somut gösterimler de söz konusu iken, daha soyut bir kavram olan grup için somut bir gösterim kullanmak mümkün değildir. Dolayısıyla üzerinde çalışılan kavramın imkan ve kısıtlamaları kullanılan gösterimleri belirleyebilmektedir. Aşağıda Tablo 2'de sunulan örnekte $f(x) = x^2$ ifadesine ilişkin farklı gösterimler sunulmakta olup, bu örnek üzerinden hem farklı gösterimler örneklendirilmekte hem de ifadenin doğasından dolayı ortaya çıkan kavrama özgü gösterimler ele alınmaktadır. $f(x) = x^2$ fonksiyonun bu halindeki gösterim biçimini cebirsel, analitik ya da yazılı sembolle gösterim olarak ifade edebiliriz. Aşağıdaki Tablo 2'de bu ifadenin çoklu gösterimler aracılığıyla daha farklı nasıl gösterilebileceği sunulmuştur.

Tablo 2. $f(x) = x^2$ fonksiyonuna ilişkin farklı gösterim biçimleri

<table>
<tr><th>Gösterim Türü</th><th>Örnek</th></tr>
<tr><td>1. Cebirsel gösterimi</td><td>$f(x) = x^2$</td></tr>
<tr><td>2. Tablo/Nümerik gösterimi</td><td><table><tr><td>x</td><td>...</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>....</td></tr><tr><td>$f(x) = x^2$</td><td>...</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>....</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>3. Grafiksel gösterimi</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4. Sözel gösterimi</td><td>Her reel sayıyı karesi ile eşleyen kural</td></tr>
<tr><td>5. İki küme arasında eşleme gösterimi</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6. Liste yöntemi gösterimi</td><td>$f = \{\ldots, (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9) \ldots\}$
ya da $f = \{(x, x^2) | x \in R\}$</td></tr>
</table>

$f(x) = x^2$ ifadesine ilişkin verilen tabloya bakıldığında aynı ifadenin farklı gösterim biçimleri görülmektedir. Bu gösterimler kullanıldığında ve aralarındaki ilişki kurulduğunda kavramın ve ifadenin daha iyi anlaşılmasına hizmet edeceği açıktır[3]. Hem bu gösterim biçimlerinin hem de aralarındaki ilişkinin öğretimde vurgulanması öğrencilerin ilişkilendirme becerilerinin gelişimine katkı sunabilmektedir. Dolayısıyla kavram ve ifadelere ilişkin farklı gösterimler, $f(x) = x^2$ örneğinde de görüldüğü gibi, kavramsal ve anlamlı öğrenme için gerekli olup bu çalışma kapsamında da ilişkilendirme becerisinin temel bir bileşeni olarak kabul edilmiştir.

3. Gerçek Hayatla İlişkilendirme

Matematik öğrenme sürecinde önemli bir yere sahip olan gerçek hayat ve matematik arasındaki ilişki ilgili literatürde de sıkça vurgulanmaktadır (NCTM, 2000; Jurdak, 2006; Stillman ve Galbraith, 1998). Bu ilişkilendirme türü bu çalışma kapsamında iki alt-bileşen altında ele alınmaktadır:

- Kavramı bir bağlam içerisinde ele alma
- Gerçek hayat ilişkisinin sözel örneklerle ifade edilmesi

3.1. Kavramı Bir Bağlam İçerisinde Ele Alma

Kavramı bir bağlam içerisinde ele alma, matematiksel kavramların gerçek hayat bağlamı kullanılarak öğretimlerinin yapılmasıdır. Gerçek hayat durumları sadece öğrencilerin gerçek dünyada doğrudan karşılaştığı durumlar değil aynı zamanda hayal edebileceği problem durumlarıdır (Van den Heuvel-Panhuizen ve Wijers, 2005). Bir bireyin gerçek hayatta karşılaşacağı durumlar sınırlı

[3] Gösterimleri ekonomik bir şekilde sunmak için kısıtlı sayıdaki reel sayılar arasındaki eşleştirmelere yer verilmiştir. Ancak kural gereği tüm reel sayıların karesi ile eşleneceği ifade edilmek amaçlanmıştır.

olabileceğinden dolayı, gerçek hayat ilişkileri karşılaşılan ya da karşılaşma ihtimali olan durumlar olarak ele alınmaktadır. Örneğin, negatif sayıların öğretiminde asansör-zemin kat-bodrum katı gibi analojilerin kullanılması, aritmetik ortalama ve ortanca gibi kavramların öğretimi için sınıftaki öğrencilerin matematik yazılı sınav sonuçlarının gerçek veriler olarak kullanılması ve özellikle klasik sözel problemlerde sıkça karşılaşılan yaş ve havuz kavramlarının kullanılması gerçek hayat bağlamları için birer örnektir (Gainsburg, 2008). Klasik hikaye problemleri gerçek hayat ve matematik arasında bağlantı kurulmasına hizmet ettiği için matematik öğretiminde öğretmenler tarafından özellikle tercih edilmektedir (Ji, 2012).

Bu bileşenin farklı disiplinlerle ilişkilendirmeden farklı olduğunun altının çizilmesinde fayda görülmektedir. Farklı disiplinlerle ilişkilendirmede matematiksel bir kavramın öğretimi için matematik dışındaki bir disiplinin kavramlarının kullanımı söz konusu iken, gerçek hayat ile ilişkilendirmede matematiksel kavramların öğretimi için doğrudan gerçek hayat bağlamlarının (negatif sayılar için asansörün kullanılması) seçilmesi ve kullanılması durumu vardır.

3.2. Gerçek Hayattan Sözel Örnek Verme

Matematik ve gerçek hayat ilişkilerinin sözel olarak ifade edilmesi, bir kavram öğretilirken başvurulan gerçek hayat bağlamlarının sadece sözel olarak kullanılmasıdır. Dikdörtgen kavramı öğretilirken, kavram matematiksel olarak verildikten sonra, sınıftan ya da günlük hayattan kavrama ilişkin sadece sözel olarak örneklerin verilmesi bu alt-bileşen için örnek olarak gösterilebilir. Benzer şekilde oran kavramı sınıftaki kız öğrencilerin sayısının erkek öğrenci sayısına oranı bağlamı üzerinden anlatılmak yerine, kavram formel olarak verildikten sonra 'bu kavram sayesinde sınıftaki kız sayısının erkek sayısına oranı bulunabilir' şeklinde bir örneğin verilmesi yine bu bileşen için bir örnektir.

İlgili literatüre bakıldığında öğretmenlerin gerçek hayat ilişkilerini sözel olarak mı yaptıkları yada bir bağlam içerisinde mi ele aldıkları ayrımının yapılmadığı dikkat çekmektedir. Ancak Coşkun'un (2013) yaptığı çalışmada, öğretmenlerin bazı durumlarda gerçek hayat bağlamlarından sadece söz etme eğiliminde olduğu görülmüştür. Çalışmada ayrıca genelde problemlerin gerçek hayat bağlamı olarak kullanıldığı ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla bu alt-bileşen gerçek hayat ile ilişkilendirmenin farklı şekillerde yapılabileceğini ortaya koyması açısından önemli bulunmuş ve ilişkilendirme ile ilgili oluşturulan kavramsal çerçeve kapsamında değerlendirilmiştir.

4. Farklı Disiplinlerle İlişkilendirme

Matematiksel bir konunun ya da kavramın öğretiminde farklı disiplinlerin kavramlarından faydalanma durumları matematiği farklı disiplinlerle ilişkilendirme bileşeni çerçevesinde değerlendirilmektedir. Farklı disiplinlerle ilişkilendirme iki alt-bileşen altında yapılabilmektedir:

- Kavramı farklı bir disiplinin bağlamı içerisinde ele alma
- Farklı disiplinlerle ilişkilendirmenin sözel örneklerle ifade edilmesi

4.1. Kavramı Farklı Bir Disiplin Bağlamı İçerisinde Ele Alma

Matematiksel bir kavramın ya da ifadenin öğretiminin farklı bir disiplinin bağlamı ve dolayısıyla kavramları aracılığıyla yapılması bu alt bileşen çerçevesinde değerlendirilmektedir. Örneğin, koordinat sistemi kavramının öğretiminde öğretmenin Türkiye'nin coğrafi koordinat sistemindeki enlem (paralel) ve boylam (meridyen) kavramlarından faydalanarak bu kavramı ele alması bu alt bileşen için örnek olarak gösterilebilir. Türkiye 26°-45° doğu meridyenleri 36°-42° kuzey paralelleri arasında yer almaktadır. Dolayısıyla Türkiye'nin konumu belirlenirken coğrafi kavramlar olan enlem ve boylamdan yararlanılmaktadır. Matematikte düzlemdeki herhangi bir noktanın konumunun belirlenmesi için koordinat sistemine ihtiyaç vardır. Koordinat sisteminde ise bir noktanın konumunu (örneğin, (3,5) noktası) yani yerini tayin etmede birer matematiksel kavram olan apsis ve ordinat kullanılmaktadır. Buradan hareketle bir öğretmenin apsis ve ordinat kavramlarının öğretiminde diğer bir disiplinin (Coğrafyanın) kavramı olan enlem ve boylamdan faydalanarak öğretim yapması farklı disiplinle ilişkilendirmeye örnektir. Dolayısıyla burada esasta yapılan şey matematiksel bir kavramın öğretiminde farklı bir disipline ait kavramlar aracılığıyla öğretimin yapılmasıdır.

Öte yandan yukarıda verilen örnekte kullanılan bağlam, gerçek hayat bağlamından faklı olup, bir disipline özgü kavramları içeren bir özelliğe sahiptir. Örneğin koordinat sistemi sinema salonundaki veya sınıftaki konumlarla da ilişkilendirilerek ele alınabilir ki, bu gibi bağlamlar herhangi bir disipline özgü olmadığı için, gerçek hayat ile ilişkilendirme bileşeni ile ilgilidir. Farklı disiplinlerle ilişkilendirme için başka bir örnek matematikte kullanılan hız problemleri olabilir. Örneğin, "Bir araç alacağı mesafeyi 80 km/sa hızla 4 saatte alıyorsa aynı mesafeyi 100 km/sa hızla kaç saatte alır?" problemi için orantı kavramı kullanılarak sonuca ulaşılabilir. Hız kavramı fen bilimlerine ait bir kavram olup, oran orantı kavramının öğretiminde ya da pekiştirilmesinde kullanılmaktadır. Dolayısıyla fen bilgisine ait bir kavramın kullanılması söz konusu olduğu için, bu örnek farklı disiplinle ilişkilendirme başlığı altında değerlendirilmektedir.

4.2. Farklı Disiplinlerle İlişkilendirmenin Sözel Örneklerle İfade Edilmesi

Matematiksel kavramların öğretiminde farklı disiplinlere ilişkin kavramların sadece sözel olarak kullanılmasıdır. Örneğin negatif sayıların öğretiminde, negatif sayılar matematiksel olarak verildikten sonra, fen bilgisinden termometre ve dolayısıyla sıcaklık ile ilişkilendirilmesi bu alt-bileşen için örnek olarak gösterilebilir. Benzer şekilde türev kavramının anlık hızın hesaplanmasını gerektiren bir bağlam üzerinden anlatılması yerine, kavram formel olarak verildikten sonra 'bu kavram sayesinde anlık hız veya ivme hesabı yapılabilir' şeklinde bir örneğin verilmesi yine bu alt bileşen kapsamında değerlendirilmektedir.

İlgili literatüre bakıldığında öğretmenlerin farklı disiplinlerle ilişkilendirmeyi sözel olarak mı yaptıkları ya da bir bağlam içerisinde mi ele aldıkları ayrımının yapılmadığı dikkat çekmektedir. Ayrıca müfredatlarda farklı disiplinlerle ilişkilendirme teşvik edilmesine rağmen, Coşkun'un (2013) yaptığı çalışmada, gerçek sınıf ortamlarında öğretmenlerin farklı disiplinlerle ilişkilendirmeyi çok az yaptıkları görülmüştür. Dolayısıyla bu alt-bileşen farklı disiplin ile ilişkilendirmenin farklı şekillerde yapılabileceğini ortaya koyması açısından önemli bulunmuş ve ilişkilendirme ile ilgili oluşturulan kavramsal çerçeve kapsamında ele alınmıştır.

Şimdiye kadar dört ilişkilendirme bileşeni ayrı ayrı ele alınmıştır. Aşağıda yer alan Tablo 3'te ise bu bileşenlerin daha iyi anlaşılması için gösterge ve örnekleri birlikte toplu olarak sunulmuştur. Göstergeler ile her bir bileşen biraz daha operasyonel hale getirilmeye çalışılmıştır. Sunulan ilave örnekler ile de her bir bileşenin daha net anlaşılması amaçlanmıştır. Sunulan örneklerin bazıları sınıfta karşılaşılabilecek bir formda/dil yapısında sunulurken bazıları ise göstergelerin daha iyi anlaşılmasına hizmet edecek şekilde ifade edilmiştir.

Tablo 3. İlişkilendirme Becerisi, Göstergeleri ve Örnekleri

Ana Bileşen	Alt bileşen	Göstergeler	Örnek
Kavramlar arası ilişkilendirme	*Kavramla diğer kavramlar arasında ilişki kurma*	Kavramın/matematiksel ifadenin öğretiminde diğer kavram/ kavramların kullanılması	"Bir çemberin belli bir merkez açısına karşılık gelen **yay parçasının uzunluğu** hesaplanırken **orantı** kullanılmaktadır. Daha açık bir ifadeyle, 360° için çevre uzunluğu $2\pi r$ ise αiçin yay parçasının uzunluğu $\frac{2\pi r\alpha}{360}$ dır"
	Kavram ile alt kavramları ve alt kavramların kendi arasında ilişki kurma	Öğretimde ana kavram ile alt kavramları arasındaki hiyerarşinin veya ilişkinin kullanılması	" **Eşkenar üçgen** bütün açıları 60^0 ve kenar uzunlukları eşit olan **üçgendir**."
		Ana kavramın alt kavramları arasında ilişki kurulması	" **Eşkenar üçgen** aynı zamanda **dar açılı bir üçgendir**."

Tablo 3. Devamı

Ana Bileşen	Alt bileşen	Göstergeler	Örnek
Kavramın farklı gösterimleri arasında ilişkilendirme		En az iki farklı gösterim arasında bağlantı kurulması (Tablo-grafik, denklem-grafik, sözel ifade-denklem, Sembolik gösterim-resim-model-somut cisim-sözel ifade gibi.)	" *Bir sayının üç katının yedi fazlası 45'e eşittir* ifadesinin cebirsel gösterimi *3x+7=45* şeklindedir." "$\frac{1}{5}$' birim kesrinin sınıfa getirilen **pasta** üzerinden somut olarak gösterilmesi, daire şekli üzerinden **modellenmesi** ve '**beşte bir**' şeklinde okunması"
Gerçek hayatla ilişkilendirme	*Kavramı bir bağlam içerisinde ele alma*	Gerçek hayat bağlamı içeren problem veya örnek kullanılması Somut modeller veya simülasyonlar üzerinden öğretim yapılması	"Sınıfımızdaki kız ve erkek öğrencilerin yaşlarının aritmetik ortalamaları arasındaki fark kaçtır?" " -10 sayısı birine 10 lira borçlu olmak gibidir. +10 sayısı cebimizde 10 lira olması gibidir." "Eşitlik kavramının terazi (somut veya simülasyonu) kavramı üzerinden anlatılması"
	Gerçek hayattan sözel örnek verme	Kavram/ifade ile gerçek hayat ilişkisinin sadece sözel olarak belirtilmesi	"Yansıma, dönme ve öteleme hareketleriyle yapılan süslemeleri evimizdeki halı desenlerinde, Osmanlı Mimari eserlerinde görebiliriz."
Farklı disiplinlerle ilişkilendirme	*Kavramı farklı bir disiplin bağlamı içerisinde ele alma*	Farklı bir disipline ait bağlam/kavram/ifade üzerinden matematiksel kavramın/ifadenin öğretiminin yapılması	" Bir hareketlinin anlık hızının belirlenmesinden hareketle türev kavramının tanıtılması"
	Farklı disiplinlerle ilişkilendirmenin sözel örneklerle ifade edilmesi	Kavramın farklı disiplinlerle ilişkisinin sözel olarak belirtilmesi Matematiğin farklı disiplinlerdeki kullanımının sadece sözel olarak belirtilmesi	" **Oran** kavramı **fen bilimlerinde hız ve yoğunluk** kavramlarını açıklamakta kullanılmaktadır."

İlişkilendirme Bileşenleri Arasındaki İlişki

Şimdiye kadar ilişkilendirmenin dört bileşeni bağımsız bir şekilde ele alınmıştır. Ancak uygulamada bu bileşenler birbirlerinden tamamen bağımsız olmayıp, bir problem veya örnek çözümünde birden fazla bileşen kullanılabilir. Bileşenler arasındaki yakın ilişki için aşağıdaki problem ve muhtemel bir çözüm yöntemi örnek olarak sunulmuştur.

"Bir araç 240km'lik yolun önce 2/5'sini sonra da 2/10'sini 80 km/sa hızla gitmiştir. Kalan yolu 100 km/sa hızla giderse tüm yolu 80 km/sa hızla gitmesine kıyasla kaç saat daha erken varmış olur?"

Bu problemin çözümü sürecinde ilişkilendirmenin dört bileşeninin hepsini görmek mümkündür. Öncelikle problem hız kavramını içerdiği için fen bilgisi disiplinine ait bir kavramın kullanılması söz konusu olup, bu açıdan problem farklı disiplinlerle ilişkilendirmeye imkan tanımaktadır. Problem bağlamı gerçek hayat bağlamı olup araçların hızları gerçek hayatta da karşılaşılan bir durumdur. Bu yönüyle problem gerçek hayat ile ilişkilendirmeye de olanak tanımaktadır. Problem çözümünde kalan 100 km'lik yol modellenerek çözüme ulaşılırsa, farklı gösterimler arasında (basit kesir ve modellenmesi) ilişkilendirme yapılmış olur. Öte yandan çözüm sürecinde ilgili model 1/10'lik birim kesirlere ayrılıp kesir ve birim kesir kavramları arasında ilişki kurulabilir ki, bu durum kavramlar arası ilişki çerçevesinde değerlendirilmektedir. Benzer şekilde oran-orantı kavramı da kullanılarak problem çözülebilir ve bu şekilde kesir-orantı ilişkisi kurulabilir.

Başka bir örnek istatistik öğrenme alanıyla ilgili verilebilir. İstatistik alanıyla ilgili sınıfta küçük bir anket çalışmasının yapıldığını düşünelim. Sınıftaki öğrencilerin beş farklı renkten (mavi, yeşil, kırmızı, beyaz, sarı) hangilerini sevdikleri belirlenirken bir çetele tablosu oluşturulup, devamında bu veriler bir grafik yardımıyla gösterilip yorumlanabilir. Bu örnek hem gerçek hayatla ilişkilendirme hem de kavramın farklı gösterimleri arasında ilişkilendirme yapma bileşenleri çerçevesinde değerlendirilmektedir.

Verilen örnekler doğası gereği ilgili ilişkilendirmelerin yapılmasına imkan tanımaktadır. Ancak bu ilişkilendirmelerin görünür olması öğretmenlerin yapacağı öğretim ile yakından ilişkilidir. Örneğin istatistik alanı ile ilgili verilen örneğin sınıf içerisindeki uygulamalarında farklı boyutlarına odaklanıldığında, baskın olan bileşen değişkenlik gösterebilir. Gerçek hayat bağlamının kullanılmasına dikkat çekilirse *gerçek hayatla ilişkilendirme* bileşeni, tablo ve grafik arasındaki dönüşüme odaklanılırsa *farklı gösterimler arasında ilişkilendirme* bileşeni daha baskın bir görünüm ortaya koyar. Benzer olarak verilen ilk örnekte orantı kavramı ön plana çıkartılabileceği gibi hız kavramı ya da hesaplanması da ana gündem haline getirilebilir. Dolayısıyla öğretmenlerin sınıf içerisindeki söylemleri ya da örnekler ders kitaplarında yer alıyorsa kitap yazarlarının soru çözümlerindeki vurguları ilişkilendirmenin hangi bileşeninin ön plana çıkarıldığı konusunda belirleyici olabilmektedir.

Sonuç olarak, sınıf içi uygulamalarda ilişkilendirme bileşenlerini müstakil veya birlikte gözlemlemek mümkün olduğu gibi, bir bileşen ekseninde yapılan ilişkilendirmeler kapsamında diğer bileşenlerle ilgili ilişkilendirmeler de yapılabilir. Gerçek hayatla ilişkilendirme ve farklı disiplinlerle ilişkilendirme bileşenleri daha kapsayıcı olduğu için genelde diğer iki bileşene ilişkin ilişkilendirmeler bu iki kapsayıcı bileşen altında yapılmaktadır. Dolayısıyla ilişkilendirme becerisinin içeriğini oluşturan bileşenler arasında da yakın bir ilişkinin varlığı söz konusudur.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

İlişkilendirme becerisine yönelik olarak yapılacak olan tartışma dört alt başlık altında ele alınacaktır. Öncelikle ilişkilendirme becerisi matematiğin doğası açısından irdelenecek, devamında ise matematik öğretimi ve öğrenimi açısından ele alınacaktır. Sonraki alt başlıkta ise bir uygulama aracı olarak ilişkilendirme kavramsal çerçevesi tartışılacaktır. Son olarak da ilişkilendirme becerisi bir yaşam becerisi olarak daha genel çerçevede değerlendirilecektir.

1. ***Matematiğin Doğasına Bakan Yönüyle İlişkilendirme***

Matematik disiplini doğası gereği hiyerarşiktir; dikey ve yatay olarak kavramlar arası ilişkilendirmeye dayalıdır. Matematiğin doğasının bu özelliği öğretim programlarına da yansıtılmakta ve yıllara yayılarak öğretimi yapılan kavramlar genelde birbirini takip edecek veya aralarında ilişki kurulacak şekilde programlarda yer almaktadır. Örneğin ilkokul matematik öğretim programında sadece doğal sayılara yer verilmektedir. Ortaokulda ise bu sayı kümelerini tam sayılar, rasyonel sayılar ve reel sayılar takip etmektedir. Lise seviyesinde ise reel sayılar daha detaylı bir şekilde ele alınmakta ve sonrasında ise karmaşık sayılara yer verilmektedir. Bu sayı kümelerinin arasında birbirlerinin alt kümeleri olma ilişkisi var olup, öğretim programlarında farklı seviyelerde öğretimi yapılmaktadır. Benzer şekilde aynı seviyede kavramlar arası ilişkilendirmeler de yapılabilmektedir. Örneğin oran-orantı kavramı veri öğrenme alanı öğretiminde bir uygulama aracı olarak kullanılabilmektedir. Ya da üçgen kavramının alan bağıntısı dikdörtgen kavramının alan bağıntısının oluşturulmasında kullanılabilmektedir. Dolayısıyla öğrenim ve öğretime bakan yönüyle, öğrencilerin kavramlar arasında sözü edilen türden yatay ve dikey ilişkiler kurmaları ve bilmeleri hem aynı öğrenme alanı içindeki ilişkilerin hem de farklı öğrenme alanları arasındaki ilişkilerin anlaşılması için gereklidir. Bu ilişkilerin kurulması ve anlaşılması aynı zamanda matematik öğreniminde önemli bir yer tutan kavramsal/ilişkisel anlamanın (Skemp, 1976; Hiebert ve Lefevre, 1986) gerçekleşmesine de hizmet edecektir. Bu çalışma kapsamında gündeme getirdiğimiz ilişkilendirme kavramsal çerçevesinin kavramlar arası ilişkilendirme bileşeni matematiğin doğasında zaten var olan bu ilişkinin öğrencilere kazandırılmasına yönelik olup, öğretimde de bu ilişkisinin kurulması ilişkilendirme becerisinin geliştirilmesi açısından son derece önemlidir.

2. ***Matematiğin Öğretimine Bakan Yönüyle İlişkilendirme***

İlişkilendirme kavramsal çerçevesinin kavramlar arası ilişkilendirme bileşeni daha çok matematik disiplinin doğasına yönelik iken, farklı gösterimler, gerçek hayat ve farklı disiplin bileşenleri ise daha çok matematiğin öğretimine yöneliktir. Bu bileşenler üzerinden yapılan ilişkilendirmeler esasında matematiksel kavramların kavramsal düzeyde öğrenilmesine ve kavramlar arası ilişkilendirme bileşeninin de daha etkin yapılmasına imkan tanımaktadır.

2.1. ***Farklı Gösterimler Arasında İlişkilendirme***

Farklı gösterimler arasında ilişkilendirme yapma matematik öğreniminde matematiksel kavramların veya ifadelerin derinlikli ve kavramsal düzeyde öğrenilmesi ile ilgilidir. Öğrencilerde farklı gösterimler arasında ilişki kurma becerisinin geliştirilmesi ise öğretmen yeterlikleri ile yakından ilişkilidir. Nitekim Shulman (1986) da kavramın farklı gösterim bilgisini öğretmenin Pedagojik Alan Bilgisinin bir göstergesi olarak ele almıştır. Yapılan bazı çalışmalar ise öğretmenlerin gösterimler ile ilgili zorluklara sahip olduklarını göstermektedir (Hitt, 1998). Bu çalışma kapsamında farklı gösterimler arasında ilişki kurma ilişkilendirme becerisinin bir bileşeni olarak ele alınmış ve öğretmenlerin sınıf içi uygulamalarında ilişkilendirme becerisine yönelik öğretim yapıp yapmadıklarının bir göstergesi olarak kabul edilmiştir.

Farklı gösterimlerle ilgili yapılan çalışmalara bakıldığında, özellikle öğrencilerin öğrenmelerine sağladığı faydalar üzerine odaklanılmış ve öğretmen araştırmaları boyutu ihmal edilmiştir (Ainsworth ve Van Labeke 2004; Ainsworth, 2006; Alacaci, 2009; Gürbüz ve Birgin, 2008; Ural, 2012; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Öğretmenlerin sınıf içi uygulamalarında farklı gösterim biçimlerini nasıl kullandıkları ve dolayısıyla ilişkilendirme becerisi için neler yaptıkları hakkında da çok az çalışma bulunmaktadır (Coşkun, 2013).

Farklı gösterimler ilişkilendirme becerisinin geliştirilmesine katkı sunmakla birlikte sınıf içi uygulamalarda bu gösterimlerin imkan ve sınırlılıklarına dikkat edilmesi de gerekmektedir. Sadece bir gösterime dayalı bir öğretim bu becerinin zayıf bir şekilde gelişmesine yol açabilmektedir. Bu durum Ainsworth'un (1999, s.34) çalışmasında da vurgulanan bir husustur. Ainsworth (1999, s.34) farklı gösterimlerin üç temel işlevinden bahsetmektedir; *tamamlayıcı*, *sınırlı yorumlama ve derinlemesine anlamayı inşa etme*. Tamamlayıcı işlevden kasıt, her gösterim kavramla ilgili faklı bilgiler içermekte ve bu şekilde gösterimlerden birinde olmayan bilgi diğerinden elde edilebilmektedir. Örneğin$f(x) = x^2$ ifadesine ilişkin çoklu gösterim biçimleri (sözel, tablo) birbirlerini tamamlayarak ifadenin daha anlamlı bir öğrenmenin gerçekleşmesine imkan sunabilmektedir.

Gösterimler aynı zamanda *sınırlı yorumlama* işlevine sahip olabilir. Örneğin, $f(x) = x^2$ cebirsel ifadesi birçok bilgiyi içermesine rağmen, bu gösterim biçimi, aslında diğer gösterimlerin ifşa ettiği kısımların görülmesini kısıtlamaktadır. Farklı gösterimlerin *derinlemesine anlamayı inşa etme* işlevinde kasıt ise, farklı gösterim biçimlerinin öğretimde beraber kullanılmasıyla daha derin bir anlamanın gerçekleşmesidir. Dolayısıyla gösterimleri ayrı ayrı bilmek her ne kadar önemli olsa da bunlar arasındaki ilişkinin bilinmesi derin alama için gerekli olup, bu da bu çalışma kapsamında ele aldığımız ilişkilendirme becerisinin geliştirilmesiyle mümkün olabilmektedir. Sınıf içi uygulamalarda Ainsworth'un (1999) ifade ettiği işlevler göz önünde bulundurularak farklı gösterimler arasında yapılacak ilişkilendirmeler, ilişkilendirme becerisinin gelişmesine imkan tanıyabilecektir. Bu çerçevede teknolojinin sunduğu imkanlardan faydalanılması da bu becerisinin gelişmesi açısından önemli olup, son yıllarda yapılan çalışmalar teknoloji kullanımına özel vurgu yapmaktadır (Ainsworth ve Van Labeke, 2004; Duncan, 2010; Erbaş, 2005; Moreno ve Dura'n, 2004).

2.2. *Gerçek Hayatla İlişkilendirme*

Matematiksel kavramlar doğası gereği soyut olduğu için, kavramların öğreniminde öğrenciler büyük zorluklar yaşamaktadır. Matematiksel kavramların anlamlı bir şekilde öğrenilmesine ve daha az zorluk yaşamalarına imkan tanımak amacıyla öğretimde gerçek hayat ile ilişkilendirme sıkça kullanılmaktadır. Özellikle üniversite öncesinde okutulan matematiğin bazen gerçek yaşam durumlarından esinlenilerek üretilebilmesi ve bazen ise gerçek yaşamdaki durumların mahiyetinin anlaşılmasına katkı sağlayabilmesi durumları gerçek hayatla ilişkilendirme becerisini daha da önemli bir hale getirmektedir. Bu nedenlerden dolayı matematiğin gerçek hayatla ilişkisi matematik eğitiminde ve öğretim programlarında önemli bir yer tutmaktadır (Ji, 2012). Örneğin Gerçekçi Matematik Eğitimi yaklaşımının prensiplerinin benimsendiği Hollanda matematik öğretimi programında, gerçek hayat durumlarına büyük önem verilmekte ve öğretimler çoğu zaman buradan hareketle yapılmaktadır (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003, Van den Heuvel-Panhuizen ve Wijers, 2005). Ayrıca Mosvold'un (2008) ifade ettiği gibi, birçok ülkenin öğretim programı bireyleri günlük hayatta karşılaştıkları durumlarla birlikte gelecekteki mesleki ve toplumsal yaşamlarına hazır hale getirmeyi amaçlamakta ve bu açıdan da gerçek hayatla ilişkilendirme becerisi önem arz etmektedir.

Bu noktada sınıf içi uygulamalarda gerçek hayatla ilişkilendirmenin nasıl ve hangi nitelikte yapıldığı önemlidir. Bu çalışma kapsamında gerçek hayatla ilişkilendirmenin 'Kavramı bir bağlam içerisinde ele alma' ve 'Gerçek hayattan sözel örnek verme' bileşenleri aracılığıyla yapılabileceği belirtilmiştir. Coşkun'un (2013) yaptığı çalışmada gerçek sınıf ortamlarında öğretmenlerin bazı durumlarda gerçek hayat ilişkilendirmelerini sözel düzeyde yaptıklarını ve bağlam içerisinde ele alma bileşenini ise ihmal ettiklerini göstermektedir. Kavramları bir bağlam içerisinde ele alma esasında güç olmayıp, günlük hayat içerikli problemler ve probleme dayalı öğretim bu çerçevede kolayca kullanılabilecek enstrümanlardır. Ancak bunların öneminin bilinmesi, etkin kullanılması ve öğretimde başarılı bir gerçek hayat ilişkisinin kurulması yine öğretmenlerin yeterlikleri ile yakından ilişkilidir.

Her ne kadar günlük hayatla ilişkilendirme yapılması tavsiye edilen bir husus olsa da, gerçek sınıf ortamlarında çok az çalışmaya konu edildiği görülmektedir. Bu konuda yapılan çalışmalar ise ağırlıklı olarak TIMSS analizleri ile sınırlıdır. Örneğin, Mosvold (2008) Japonya ve Hollanda sınıflarında matematiği gerçek hayatla ilişkilendirmenin nasıl yapıldığını TIMSS video analizlerini kullanarak karşılaştırmış ve ilginç bazı bulgulara ulaşmıştır. Gerçekçi Matematik Eğitimi prensiplerinin etkili olduğu Hollanda'nın matematik derslerinde günlük yaşamla ilişkili durumlarla birçok kez (%44) karşılaşılırken, Japonya'daki derslerde bu durum nadiren (%9) görülmüştür. Hiebert ve diğerleri (2003) de yaptıkları TIMSS video analizleri sonucunda Hollanda derslerinde test kitaplarının önemli bir rol oynadığını, özellikle gerçek yaşam bağlamlı problemlerin oldukça fazla olduğunu ancak dersin geleneksel yollarla işlendiğini görmüşlerdir. Japonya derslerinde ise tartışmaya açık ortamlar oluşturulmakta, öğrenciler teorilerle, işlemlerle ilgili fikirlerini sunmakta ve derinlemesine tartışmalar yapılmaktadır. Burada Mosvold'un (2008) dikkat çektiği gibi önemli olan gerçek hayat durumlarının sınıflardaki sayısal çokluğu olmayıp nitelikli kullanılmasıdır. Ayrıca gerçek hayat bağlamlarının gerektiği yerde doğru kullanılması önemlidir. Bunlar da yukarıda ifade edildiği gibi, öğretmenlerin ilişkilendirme becerisi hakkındaki yeterlikleri ile yakından ilgilidir. Bu çerçevede bu çalışma kapsamında sunduğumuz bu bileşenin öğretime nasıl yansıtılacağı ile ilgili öğretim materyallerinin geliştirilmesi ve öğretmenlerin kullanımına sunulması oldukça önemlidir.

2.3. ***Farklı Disiplinlerle İlişkilendirme***

Çalışma alanları, nesneleri ve yöntemleri disiplinlere kimlik kazandırır ve birbirlerinden ayırır. Ancak bu durum disiplinlerin bütünüyle birbirlerinden ayrık ve aralarında ilişki olmadığı anlamına gelmez. Tam tersine disiplinler arasında yakın bir ilişki söz konusudur. Bu ilişki konusunda öğrencilerin bilgi sahibi olmaları ve öğretmenlerinde bu ilişkiyi öğretimlerine entegre etmeleri öğretim programlarınca da sıkça vurgulanan bir husustur. Bu nedenle bu çalışma kapsamında geliştirilen ilişkilendirme kavramsal çerçevesinin bileşenlerinden biri de farklı disiplinlerle ilişkilendirme olmuştur.

Her ne kadar farklı disiplinlerle ilişkilendirme öğrencilere kazandırılması öngörülen bir beceri olsa da, bu beceriden kastın ne olduğu ilgili literatürde ve daha çok da öğretim programlarında açık olmadığı görülmektedir. Bu çalışma kapsamında özel olarak farklı disiplinlerle ilişkilendirme 'Kavramı farklı bir disiplin bağlamı içerisinde ele alma' ve 'Farklı disiplinlerle ilişkilendirmenin sözel örneklerle ifade edilmesi' çerçevesinde değerlendirilmiştir. Bir matematiksel kavramın öğretimi yapılırken başka bir disiplinin bağlamı ve dolayısıyla kavramları kullanılıyorsa, burada matematiğin farklı bir disiplinle ilişkilendirilmesinden söz edilebiliriz. Ayrıca yine matematiksel bir kavramın veya ifadenin başka bir disiplindeki uygulamasından söz ediliyorsa burada da yine farklı bir disiplinle ilişkilendirme vardır. Dolayısıyla farklı bir disiplinle ilişkilendirmede merkezde matematik ve matematiksel kavramlar var olup, diğer disiplinlerin kavram veya bağlamları matematiksel kavramların öğretilmesi ve öğrenilmesinde bir araç olarak kullanılmaktadır.

Bu çalışma kapsamında dolayısıyla farklı disiplinlerle ilişkilendirme disiplinler arası ilişkilendirme yaklaşımından farklılık göstermektedir. Jacobs'ın (1989) da ifade ettiği gibi disiplinler arası yaklaşım, merkezi bir tema, konu, problem ya da deneyim etrafında birden fazla disiplinin içerik ve sürecinin organize edildiği bir yaklaşımdır. Bu yaklaşımda da matematiğin fen, sanat, dil ve genel sosyal bilim çalışmalarında önemli bir rolünün olduğunu öğrencilere fark ettirilebilir (NCTM, 2000), ancak burada farklı disiplinlerle ilişkilendirmeden farklı olarak merkezde matematik olmayıp farklı disiplinlerin ortak katkısıyla ortaya çıkabilecek ürün ya da kavram vardır. Son yıllarda ortaya çıkan STEM'i/FeTeMM'i (Science/Fen, Technology/Teknoloji, Engineering/Mühendislik ve Mathematics/Matematik) (Corlu, Capraro ve Capraro, 2014) ve matematik-fen entegre müfredatlarını (Czerniak, Weber, Sandmann ve Ahern, 1999) disiplinler arası yaklaşım çerçevesinde değerlendiriyoruz. Disiplinler arası yaklaşım da esasında yoğun bir şekilde ilişkilendirme yapmayı gerektirmektedir ve bu çalışma kapsamında sunduğumuz kavramsal çerçeve bu yaklaşımın bünyesinde kullanılabilir. Ancak bu çalışmada matematik, matematik müfredatları ve matematiksel kavramlar merkeze alındığından dolayı, disiplinler arası yaklaşıma ilişkin ilişkilendirmeler kavramsal çerçevenin dışında tutulmuştur. Disiplinler arası yaklaşımda ilişkilendirmenin mahiyeti ve nasıl yapılabileceği ile ilgili ileri araştırmalara ihtiyaç olduğu açık olup, bu husus sonraki araştırmaların konusudur.

Farklı disiplinlerle ilişkilendirme, disiplinler arası ilişkilendirmeden ve çoklu disiplinler arası ilişkilendirmeden farklı bir şekilde değerlendirilip matematik öğretiminde bu ilişkilendirme türü ile ilgili ne yapılabileceğinin irdelenmesinde fayda görülmektedir. Zira her ne kadar öğretim programlarında öğrencilerden matematiği farklı disiplinlerle ilişkilendirmeleri beklense de, gerek öğrencilerin bunu nasıl yapabileceği gerekse de öğretmenlerin öğretimlerinde bunu nasıl gerçekleştirebilecekleri açık değildir.

3. Bir Uygulama Aracı Olarak İlişkilendirme Kavramsal Çerçevesi

İlgili literatüre bakıldığında ilişkilendirme becerisi ağırlıklı olarak bir öğrenci becerisi olarak ele alınmaktadır (Carpenter vd., 2003; MEB, 2013; NCTM, 2000). Ancak bu becerinin sınıf içi uygulamalarda öğrencilere nasıl kazandırılabileceği ile ilgili rehber niteliğinde bir kavramsal çerçevenin olmadığı görülmektedir. Ayrıca sınıf içi uygulamalar çerçevesinde ilişkilendirmeye odaklanan çalışmalarda ise (Ainsworth ve Van Labeke 2004; Czerniak vd., 1999; Frykholm ve Glasson, 2005; Hiebert vd., 2003; Mosvold, 2008), ilişkilendirme becerisinin bütün bileşenleri ile birlikte ele alınmadığı ve genelde tek bileşen ekseninde araştırmalara konu yapıldığı görülmektedir. Bu çalışma kapsamında geliştirilen kavramsal çerçeve dolayısıyla öğretmenlere hem ders hazırlığı sürecinde hem de sınıf içerisinde uygulama sürecinde yol gösterici olacağı düşünülmektedir. Dolayısıyla her ne kadar sunduğumuz kavramsal çerçeve teorik olsa da, sınıf içi uygulamalar için de faydalı bir enstrüman olduğu düşünülmektedir.

4. Bir Yaşam Becerisi Olarak İlişkilendirme

Bu çalışma kapsamında ilişkilendirme becerisi her ne kadar bir matematiksel süreç becerisi olarak ele alınsa da, bu beceri bizce daha genel anlamda bir yaşam becerisidir. Zira gerçek dünya yaşamı birçok olay ve olguya ilişkili bakmayı, düşünmeyi ve yaşamayı gerekli kılmaktadır. Dolayısıyla matematik derslerinde bu becerinin geliştirilmesi esasında öğrencinin gerçek yaşama da hazırlanmasına katkı sunacaktır. Ayrıca bu becerisinin geliştirilmesi öğrencilerin diğer derslerindeki performanslarına etki edebilecektir. Bu becerinin geliştirilmesi aynı zamanda diğer matematiksel süreç becerileri olan muhakeme ve iletişim becerilerinin gelişmesine de katkı sunar ki, bu becerilerin geliştirilmesi de öğrencilerin yaşamları için önemlidir. Bütün bu hususlar ilişkilendirme becerisine yönelik yapılacak öğretimin önemini açıkça göstermektedir.

Sonuç ve Öneriler

İlişkilendirme becerisi öğrencilere kazandırılması hedeflenen temel matematiksel becerilerdendir. Ancak ilgili literatürde bu beceriyle öğrencilere esasında ne kazandırılacağı ise çoğu zaman açık olmadığı görülmektedir. Başka bir ifadeyle ilgili literatürde bu becerinin muhtevasının ne olduğu genelde açık bir şekilde belirtilmemiştir. Bu çalışma kapsamında ilişkilendirme becerisinin bileşenleri belirlenerek, bu becerinin muhtevası oluşturulmuş ve aynı zamanda bu becerinin öğrencilere nasıl kazandırılabileceği ile ilgili kavramsal bir çerçeve sunulmuştur.

İleri araştırmalara dönük olarak, öncelikle bu kavramsal çerçevenin işlevselliğine dair gerçek verilere dayalı araştırmalara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu araştırmalar farklı yöntem ve temalar çerçevesinde yürütülebilir. Örneğin, bu kavramsal çerçevenin sınıf içi uygulamalar açısından ne ölçüde etkin bir öğretim ve öğrenim aracı olduğu araştırma konusu yapılabilir. Daha açık bir ifadeyle, bu kavramsal çerçeve ışığında yapılan matematik öğretiminin öğrenci öğrenmelerine etkisinin incelenmesi önemli bir araştırma konusu olabilir. Ayrıca ilişkilendirme becerisinin temel matematiksel süreç becerilerinden biri olduğu düşünülürse, öğretmen ve öğretmen adaylarının bu beceri konusundaki yetkinlikleri için bu kavramsal çerçeve hem bir teşhis aracı olarak hem de mesleki gelişim programının içeriğini geliştirme enstrümanı olarak kullanılabilir.

Bu çalışma kapsamında ilişkilendirme becerisi sadece matematik öğrenimi ve öğretimi açısından ele alınmıştır. Geliştirilen kavramsal çerçevenin fen ve sosyal bilgiler gibi derslerde yapılan ilişkilendirmeler için de işlevsel bir araç olup olmadığı ileri araştırmalara tabi tutulmalıdır. Öte yandan bu kavramsal çerçeve kullanılarak ders kitapları gibi öğretim materyallerinde ilişkilendirmenin ne ölçüde, hangi derinlikte ve hangi bileşenleri ile materyallere yansıtıldığı araştırılarak öğrenim ve öğretimin kalitesinin artırılmasına katkı sunulabilir. Özellikle Türkiye'deki matematik ders kitapları ile PISA ve TIMSS gibi sınavlarda başarı gösteren ülkelerin matematik ders kitaplarının sunulan kavramsal çerçeve ışığında karşılaştırılması öğretici bazı sonuçların ortaya çıkmasına katkı sunabilir. Ulusal ve uluslararası sınavlarda sorulan soruların kavramsal çerçeve ışığında irdelenmesi ise diğer bir öğretici sonucun ortaya çıkmasına yol açabilir.

Kaynakça

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education*, *33*, 131-152. doi:10.1016/S0360-1315(99)00029-9

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183-198. doi:10.1016/j.learninstruc.2006.03.001

Ainsworth, S. ve Van Labeke, N. (2004). Multiple forms of dynamic representation. *Learning and Instruction*, *14*(3), 241-255. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.002

Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Alacaci, C. (2009). Öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanılgıları. E. Bingölbali ve M. F. Özmantar (Ed.). *Matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* içinde (s. 63-95). Ankara: Pegem Akademi.

Baki, A. ve Şahin, S. M. (2004). Bilgisayar destekli kavram haritası yöntemiyle öğretmen adaylarının matematiksel öğrenmelerinin değerlendirilmesi. *The Turkish Online Journal Of Educational Technology*, *3*(2), 91-104.

Bingölbali, E. (2010). Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed.). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* içinde (s. 223-255). Ankara: Pegem Akademi.

Borceux, F. (2014). *An algebraic approach to geometry: Geometric trilogy II*. Switzerland: Springer International Publishing.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. ve Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in the elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. ve Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: developing relational thinking. *ZDM, 37*(1), 53-59. doi:10. 1007/Bf02655897

Corlu, M. S., Capraro, R. M. ve Capraro, M. M. (2014). Introducing STEM education: Implications for educating our teachers in the age of innovation. *Education and Science, 39*(171), 74-85.

Coşkun, M. (2013). *Matematik derslerinde ilişkilendirmeye ne ölçüde yer verilmektedir?: Sınıf içi uygulamalardan örnekler* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Gaziantep Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Gaziantep.

Czerniak, C. M., Weber, W. B., Sandmann, A. ve Ahern, J. (1999). A literature review of science and mathematics integration. *School Science and Mathematics*, *99*(8), 421-430. doi:10.1111/j.1949-8594.1999.tb17504.x

Duncan, A. G. (2010). Teachers' views on dynamically linked multiple representations, pedagogical practices and students' understanding of mathematics using TI-Nspire in Scottish secondary schools. *ZDM Mathematics Education, 42*, 763-774. doi:10.1007/s11858-010-0273-6

Empson, S. B., Levi, L. ve Carpenter, T. P. (2010). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. J. Cai ve E. Knuth (Ed.). *Early algebraization: Cognitive, curricular, and ınstructional perspectives.* New York: Springer.

Erbaş, K. (2005). Çoklu gösterimlerle problem çözme ve teknolojinin rolü. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, *4*(4), 88-92.

Frykholm, J. ve Glasson, G. (2005). Connecting science and mathematics instruction: Pedagogical context knowledge for teachers. *School Science and Mathematics, 105*(3), 127-141. doi:10.1111/j.1949-8594.2005.tb18047.x

Gainsburg, J. (2008). Real-world connections in secondary mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*, 199-219. doi:10.1007/s10857-007-9070-8

Gürbüz, R. ve Birgin, O. (2008). Farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin rasyonel sayıların farklı gösterim şekilleriyle işlem yapma becerilerinin karşılaştırılması. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *23*(1), 85-94.

Hasemann, K. ve Mansfield, H. (1995). Concept mapping in research on mathematical knowledge development: background, methods, findings and conclusions. *Educational Studies in Mathematics, 29*(1), 45-72. doi:10.1007/BF01273900

Hiebert, J. ve Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. J. Hiebert (Ed.). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* içinde (s. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., … Chui, A. M.Y. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study.* Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123-134. doi:10.1016/S0732-3123(99)80064-9

Hunter, J. (2007). Relational or calculational thinking: Students solving open number equivalence problems. J. Watson ve K. Beswick (Ed.). *Mathematics: essential research, essential practice.*

Jacobs, H. H. (1989). *Inter dicplinary curriculum: Design and implementation.* Alexandria: Assocation for Supervision and Curriculum Development.

Ji, E. L. (2012). Prospective elementary teachers' perceptions of real-life connections reflected in posing and evaluating story problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 429–452. doi:10.1007/s10857-012-9220-5

Johnson, B. R., Seigler, R. S. ve Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: an iterative process. *Journal of Educational Psychology*, *93*(2), 346-362.

Jurdak, M. E. (2006). Contrasting perspectives and performance of high schoolstudents on problem solving in real world situated, and school contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(3), 283-301. doi:10.1007/s10649-005-9008-y

Lesh, R. ve Doerr, H. M. (2003). Foundations of models and modeling perceptive on mathematics teaching, learning, and problem solving. R. Lesh ve H. M. Doerr (Ed.). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* içinde (s. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

MEB (2013). *Ortaokul matematik dersi (5,6,7 ve 8. Sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basımevi.

Moreno, R. ve Dura´n, R. (2004). Do multiple representations need explanations? The role of verbal guidance and individual differences in multimedia mathematics learning. *Journal of Educational Psychology*, *96*(3), 492-50. doi:10.1037/0022-0663.96.3.492

Mosvold, R. (2008). Real-life connections in Japan and the Netherlands: National teaching patterns and cultural beliefs, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 1-18.* http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/mosvold.pdf adresinden erişildi.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Yazar.

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the "connections" standart: signifance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61,* 163-182. doi:10.1007/s10649-006-3365-z

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher 15*(2), 4-14.

Stillman, G. A. ve Galbraith, P. L. (1998). Applıng mathematics with real world connections: metacognitive characteristics of secondary students*. Educational Studies in Mathematics, 36*, 157-189. doi:10.1023/A:1003246329257

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Tchoshanov, M. A. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 141-164. doi:10.1007/s10649-010-9269-y

Ural, A. (2012). Fonksiyon kavramı: Tanımsal bilginin kavramın çoklu temsillerine transfer edilebilmesi ve bazı kavram yanılgıları. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *31*(1), 93-105.

Watson, A. (2004). Red errings: post-14 "best" mathematics teaching and curricula. *Brıtısh Journal of Educational Studies*, *52*(4), 359-376. doi:10.1111/j.1467-8527.2004.00273.x

Williams, C. G. (1998). Using concept maps to assess conceptual knowledge of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(4), 414-421. doi:10.2307/749858

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. ve Bay-Williams, J. M. (2012). *İlkokul ve ortaokul matematiği (S.* Durmuş, Çev.). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(9), 9-35. doi:10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Van den Heuvel-Panhuizen, M. ve Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *ZDM, 37*(4), 287-307. doi: 10.1007/BF02655816

Yıldırım, C. (1996). *Matematiksel düşünme* (2. bs.). İstanbul: Remzi Kitapevi.