Eğitim ve Bilim
2013, Cilt 38, Sayı 169

Education and Science
2013, Vol. 38, No 169

Matematik Öğretmen Adaylarının Kanıtlama Becerilerini Geliştirmeye Yönelik Bir Öğretme Deneyi*

A Teaching Experiment On Development Of Pre-service Mathematics Teachers' Proving Skills

Meltem SARI UZUN** Ali BÜLBÜL***

Hacettepe Üniversitesi

Öz

Bu çalışmanın amacı, matematik öğretmen adaylarının kanıtlama sürecindeki güçlüklerini belirlemek, kanıtlama deneyimi yaşadıkları ve grup tartışmalarıyla sosyal etkileşimde bulundukları öğretim etkinlikleri sonrasında kanıtlama becerilerindeki değişimi incelemektir. Çalışma, ortaöğretim matematik öğretmenliği programının dördüncü sınıfına devam etmekte olan altı öğrenciyle gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının kanıtlama becerileri, koşullu önermeler ve koşullu önermelerin kanıtlanmasında kullanılabilecek doğrudan kanıt, olmayana ergi ve karşıt ters ile kanıt yöntemleri kapsamında incelenmiştir. Verilerin toplanması ve analizinde nitel yaklaşım benimsenmiş ve öğretme deneyi yöntemi uygulanmıştır. Çalışmanın sonucunda, öğrencilerin kanıtlama süreçlerinde farklı düzeylerde de olsa ilerleme olduğu ve kanıtla ilgili bazı güçlüklerini giderebildikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının, çalışma süresince gösterdikleri gelişme göz önünde bulundurularak lisans düzeyindeki matematik derslerinin işlenişine yönelik önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Matematiksel kanıt, öğretmen adayları, kanıtlama

Abstract

The purpose of this study is to determine pre-service mathematics teachers' difficulties in constructing proofs and to investigate the changes in their proving skills after teaching activities that they experienced proving and interacted with group discussions. The study was conducted with six fourth grade secondary mathematics teachers. Pre-service teachers' proving skills were investigated with respect to conditional statements and three proof methods; direct proof, proof by contradiction and proof by contraposition. In this qualitative study, teaching experiment method was used. As a result it can be concluded that students' proving skills developed at different levels and they overcome some of their difficulties. Based on the results of the study suggestions are made for the instruction methods of undergraduate mathematics courses.

Keywords: Mathematical proof, pre-service teachers, proving

Summary

Purpose

The purpose of this study is to determine pre-service mathematics teachers' difficulties in constructing proofs and to investigate the changes in their proving skills after teaching activities that they experienced proving and interacted with group discussions. Pre-service teachers'

* Bu çalışma ilk yazarın doktora araştırmasının bir bölümüdür. Araştırma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu tarafından desteklenmiştir.

** Öğr. Gör. Dr. Meltem SARI UZUN, Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, meltem-s@hacettepe.edu.tr

*** Prof. Dr. Ali BÜLBÜL, Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, bulbul@hacettepe.edu.tr

proving skills were investigated with respect to conditional statements and three proof methods; direct proof, proof by contradiction and proof by contraposition. Existing literature reports students' difficulties with proof and proving, but there are not enough studies that investigate how to develop students' understandings about proof their and proving skills. The findings of this study contribute to the field by giving suggestions about instruction methods of undergraduate mathematics courses.

Method

In this qualitative study, teaching experiment method which is derived from Piaget's clinical interview was used (Steffe & D'Ambrosio, 1996). The study was conducted with six fourth grade pre-service secondary mathematics teachers at different levels of proof understanding and proving skills. The data that include students' written works, tape and video recordings of individual interviews and teaching episodes were collected in five steps. First, an instrument which is developed by researchers was administered to the students and two individual interview sessions were held with every participant to determine their understandings about proof and proving skills. Then five week classroom activities based on group discussions were carried out with participants. These classroom activities that constitute teaching episodes part of teaching experiment were two class hours per week and every session was video recorded. After teaching episodes, one more individual interview was conducted with participants. All recordings were transcribed and the data was analysed deeply by the researchers.

Results

Some difficulties and errors such as misuse of mathematical language, notation and definitions, lack of applying proof methods, obviousness obstacle, lack of strategic knowledge and beginning with conclusion were observed during the study. But the students were able to overcome some of these difficulties at the end of the study. Participants who were not familiar with the three proof methods used in conditional statements before the study, explained the process of these proof methods correctly and applied them in their last interviews. Students had some difficulties in justifying their arguments and the definitions were not formally operable (Bills & Talls, 1998) for them. But at the end of the study all participants were more carefull in writing proofs in contrast to the beginning. In classroom discussions they decided how to use definitions by interacting and sharing their suggestions. Students discussed their ideas, asked questions, made explanations and convinced each other in classroom activities. They constructed the proofs of the statements that they were not able to prove individually together in classroom discussions.

Conclusion and Discussion

As a result, it can be concluded that classroom activities that students experienced proving and interacted with group discussions were effective in overcoming their difficulties and enhancing their proving skills. Students' proving skills developed at different levels and they overcame some of their difficulties. Individual interviews and classroom activities can be defined as learning experiences that help to improve students' proving skills. It is recommended to design more learning experiences for students in undergraduate mathematics courses. In these courses students should have the opportunity to experience proving and construct proofs, discuss their ideas, make argumentations, ask questions and convince each other. These activities can be carried out by teachers in class hours or students can study in groups in practice hours by the help of assistants. More research is needed for developing instructional activities to enhance students' understanding of proof and proving skills. It is also suggested for future researches to investigate the factors that effect students' proving skills.

Giriş

Kanıt ve kanıtlama kavramları antik çağdan bu yana matematikteki en önemli kavramlar arasında yer almıştır. Matematik tarihine bakıldığında, Yunan öncesi dönemde sınama-yanılma yöntemine bağlı deneysel düzeyde kalan matematiğe, antik Yunanlıların kuramsal bilgi niteliği kazandırdığı görülmektedir (Yıldırım, 2000). Yunanlılar, bazı kabul edilmiş ilkelerden çıkan tümdengelimsel kanıt kavramını idrak etmiş ve mantıksal çıkarımı akıl yürütme sürecinin merkezine almışlardır (Harel & Sowder, 2007). Bugün anlaşıldığı anlamıyla kanıtın kaynağını, Euclid'in "Elementler"i oluşturmaktadır (Almeida, 2003).

Matematik; aksiyomlar, tanımlar, teoremler ve kanıtları, varsayımlar tarafından yapı iskeleti oluşturulan, bilimsel bir kanıtlama disiplinidir ve bu özelliği matematik ile diğer disiplinler arasındaki temel farkı açıklar (Heinze & Reiss, 2003). Kanıt, önermelerin ilişkisine dayanan mantıksal bir çıkarımdır ve eldeki genelleme, doğruluğu varsayılan ya da bilinen bir veya daha fazla önermenin zorunlu sonucu olarak gösterilebildiğinde kanıtlanmış olur (Yıldırım, 2000).

Weber (2005), kanıtlamayı mantıksal, kavramsal, sosyal ve problem çözme boyutları olan karmaşık bir matematik aktivitesi olarak tanımlamaktadır. Kanıt oluşturmayı da, kişiye bazı başlangıç bilgilerinin (örn. varsayımlar, aksiyomlar, tanımlar) verilip, istenilen sonucu elde edinceye kadar çıkarım kurallarını uygulaması beklenen bir matematiksel görev şeklinde ifade etmektedir.

Matematikte kanıtlamak, verilen öncül önermelerden belli bir sonucun mantıksal olarak çıkartılabileceğini göstermek demektir (Özer, 1998). Formel kanıt, formel aksiyomlar üzerine kurulu ve formel çıkarım kurallarına dayanan formel kelime dağarcığı ile ifade edilmelidir (Hersh, 1993). Matematiksel kanıt, kabul edilmiş tümdengelim kurallarını takip eden çıkarım zincirini içerir ve genellikle formel notasyon, sentaks ve manipülasyon kuralları ile karakterize edilir (Hanna & De Villiers, 2008). Argümantasyon ise tümdengelimsel olmayan argümanlar kullanan gerekçeli söylemlerdir (Hanna & De Villiers, 2008) ve belli bir önermenin doğruluğuna ya da yanlışlığına ikna etmek için tüm sözel araçların kullanılmasını içerir (Mariotti, 2006). İkna edici bir argümanın matematiksel kanıt olarak kabul edilmesi için, kabul edilmiş aksiyomlara ve tanımlara dayanması, mantıksal notasyonun uygun kullanılması ve belli bir kanıt yöntemine işaret eden kelimelerin yer aldığı mümkün olan en açık şekilde yazılması gerekir (Tall, 1989; Weber & Alcock, 2009). Kanıtın, üçüncü bir kişi okuduğu zaman ikna edici olması gereken sosyal bir yönü de bulunmaktadır ve kişinin kendi için ikna edici bulduğu bir argümanı her zaman kanıt olarak kabul edilmemektedir (Gholamazad, 2005). Kanıtlamada ortak amaç, mantıksal çıkarım kurallarına dayanan ve önermenin doğruluğunu gösteren geçerli bir argüman ortaya çıkarmaktır (Weber & Alcock, 2004).

Kanıt ve kanıtlamaya ilişkin yapılan tanımlar çerçevesinde, bir ifadenin doğruluğunu, bilinen gerçeklerden, tanımlardan ve önceki teoremlerden ya da sonuçlardan, doğru çıkarımları yaparak ve mantık kurallarını uygulayarak gösterme, kanıtlama; sonuçta ortaya çıkan geçerli argüman ise matematiksel kanıt olarak ifade edilebilir.

Kanıt, matematiğin temel özelliğidir ve bu yüzden matematik eğitiminde de anahtar bileşen olması gerekir (Hanna & Jahnke, 1996). Öğrencilerin matematiğin soyut ve kavramsal yapısını anlamaları için kanıt kavramını, kanıtın amacını ve kanıtlama sürecini bilmeleri çok önemlidir. Üniversite düzeyindeki matematik derslerinde, öğrencilerin başarıları, büyük ölçüde matematiksel kanıtı anlamalarına ve kanıtlama becerilerine bağlıdır. Öğrencilerin matematiksel kanıtlamada başarılı olabilmeleri; tanım, teorem ve kavram bilgilerinin tam olmasını, bilgilerini kullanarak mantıksal çıkarım yapmalarını, matematiğin sembolik dilini anlamalarını ve kullanmalarını, kanıtlama yöntemlerini bilmelerini ve bu yöntemleri doğru yerde ve doğru biçimde uygulamalarını gerektirmektedir. Ancak öğrencilerin kanıt kavramlarını ve kanıtlamaya ilişkin güçlüklerini belirlemeye yönelik olarak yapılan çok sayıdaki çalışma, öğrencilerin matematiksel kanıt kavramlarının yetersizliğine, kanıt oluşturma sürecinde çok çeşitli güçlükler yaşadıklarına, kanıtlama ile ilgili hatalarına ve kavram yanılgılarına dikkat çekmektedir (Baker & Campbell, 2004; Gibson, 1998; Moore, 1994; Selden & Selden, 2003; Selden & Selden, 1995; VanSpronsen, 2008).

Öğrencilerin kanıt kavramına ilişkin görüşlerini, kanıt şemalarını, kanıtlarla ilgili güçlüklerini ve bu güçlüklerin nedenlerini ortaya çıkarmak için bazı çalışmalar yapılmış olsa da, henüz yanıtlanmamış olan bir araştırma sorusu, öğrencilerin kanıtlama becerilerini geliştirmek ve bilişsel çelişkilerini gidermek için öğretme müdahalelerinin nasıl tasarlanacağıdır (Antonini & Mariotti, 2007). Öğrencilerin kanıtla ilgili güçlüklerinin nedenlerini ortaya koymak ve bu güçlükleri gidermeye yönelik öğretim tasarlayabilmek için daha çok sayıda çalışma yapılmasına ihtiyaç vardır. Öğrenci güçlükleri ile ilgili bilgiler, bu güçlüklerin giderilmesine yönelik öğretim ortamlarının düzenlenmesinde ve öğretim etkinliklerinin tasarlanmasında yol gösterici olacaktır. Son yıllarda yapılan çalışmalar, öğrencilerin kanıta yönelik tutumlarını, kanıt şemalarını, doğru ve geçerli kanıt oluşturmadaki güçlüklerini belirleyen çalışmaların sayısının gittikçe arttığını ancak öğrencilerin kanıtlama sürecine nasıl başladıklarına, öğretme stratejileri ve öğrenme deneyimlerinin öğrencilerin anlamalarının gelişmesini nasıl etkilediğine odaklanan çalışmaların çok az sayıda olduğunu vurgulamaktadır (Smith, 2006). Bu alandaki eksikliği gidermeye yönelik olarak, matematik eğitimi araştırmaları, öğrencilerin güçlüklerini belirledikten sonra bu güçlüklerin hangi öğretme müdahaleleri ile giderilebileceğine doğru yönelmektedir (Mariotti, 2006). Harel, Selden ve Selden (2006); öğrencilerin nerede olduğunu biliyoruz, matematikçilerin nerede olduğunu biliyoruz ama üniversite öğrencilerini bulundukları yerden olmalarını istediğimiz yere nasıl getireceğimizi bilmiyoruz diyerek, üniversite öğrencilerinin kanıtlamadaki seviyelerinin nasıl ilerletilebileceğinin araştırılması gerektiğini vurgulamaktadırlar.

Öğrencilerin kanıt kavramlarının oluşmasında, kanıtlama becerisi kazanmalarında ve kanıtla ilgili yaşadıkları güçlüklerde yapılan öğretimin etkisi büyüktür. Geleneksel yaklaşımla, "tanım-teorem-kanıt" biçiminde ve öğretmenin anlatımına dayalı olarak işlenen lisans derslerinin öğrencilerin kanıtlama becerilerini geliştirmeye katkı sağlamadığı, kanıtların öğrencilere sunulduğu ve onların oluşturmak zorunda olmadığı kanıt öğretiminin başarısız olduğu belirtilmektedir (Pedemonte, 2007; Selden & Selden, 2007; Weber, 2004).

Çalışmalar, öğrencilerin küçük gruplarda birlikte çalışarak verilen görevleri yerine getirdikleri, çözümlerini sınıfa sundukları, bu çözümleri tartışarak değerlendirdikleri, öğretimde aktif ve birbirleriyle etkileşim halinde oldukları sınıf ortamlarında, öğrenmenin daha etkili olduğunu göstermiştir (Brown, 2003; Cesar, 1998; Smith, 2006; Weber, Maher, Powell & Lee, 2008). Öğrencilerde kanıtlama becerisinin gelişmesinde, öğretmen tarafından yönetilen sosyal etkileşimin, kanıtla ilgili yeni kurallar öğrenmede hızlandırıcı etki yapacağı (Almeida, 2001), matematiksel gelişme sürecinde etkileşimin katalizör olarak görülebileceği ifade edilmektedir (Cobb & Yackel, 1996). Öğrencilerin kanıtlama becerisini kazanmaları ve bu becerilerini geliştirebilmeleri için de, kanıtlama deneyimi yaşamalarına olanak veren ve sosyal etkileşime dayalı sınıf ortamlarının etkili olacağı düşünülmektedir. Araştırmalar, öğrencilerin küçük gruplarda kanıt yazma girişiminde bulunarak (Selden, Selden & McKee, 2008) ve grup tartışmaları yaparak (Selden & Selden, 2007; Weber, Maher, Powell & Lee, 2008) öğrenmelerinin daha etkili olacağı ve kanıtlama becerilerinin gelişeceği görüşünü desteklese de, bu tür bir öğrenme-öğretme ortamında öğrencilerin kanıtlama süreçlerini inceleyen az sayıda çalışma bulunmaktadır (Blanton, Stylianou & David, 2009; Weber, Maher, Powell & Lee, 2008). Harel, Selden ve Selden (2006), kanıt öğretimi için yapılacak çalışmalarda öğrencilerin kanıt oluşturmayla uğraşmalarını sağlamak ve bu süreçte onlara Sokratik tarzda sorular sormak gibi bir yaklaşım önermekte ve birkaç sınıf buluşmasında grup çalışmalarının kaydedilip öğrencilerin başlangıçtaki ve sonraki kanıt oluşturma girişimleri arasındaki ilişkinin incelenebileceğini belirtmektedirler.

Bu çalışmada, öğretmen adaylarının $p \Rightarrow q$ türündeki ifadeleri yani koşullu önermeleri kanıtlama becerilerini, kanıtları anlama düzeylerini ve kanıtlama sürecindeki güçlüklerini belirlemek; öğrencilerin kanıtlama deneyimi yaşadıkları ve grup tartışmalarıyla sosyal etkileşimde bulundukları sınıf ortamında, kanıtlama süreçlerini incelemek ve kanıtlama becerilerindeki değişimi değerlendirmek amaçlanmaktadır.

Öğrencilerin kanıtlama becerileri ve kanıtları anlamaları, koşullu önermeler ve koşullu önermelerin kanıtlanmasında kullanılabilecek doğrudan kanıt, olmayana ergi ve karşıt ters ile kanıt yöntemleri kapsamında ele alınmıştır. Çalışmada, öğrencilerin genel olarak kanıtlama becerileri üzerinde durulmaktadır. Bu nedenle, kanıtlama becerileri belli bir konu veya ders kapsamında ele alınmamış, temel matematik konuları (sayılar, kümeler, fonksiyonlar vb.) düzeyindeki kavramlarla ilgili önermeler kullanılmıştır.

Kanıtlama sürecine ilişkin yurtdışında gittikçe artan sayıda oldukça kapsamlı çalışmalar yapılmaktadır. Ülkemizde ise özellikle üniversite düzeyinde yapılmış olan sınırlı sayıda çalışmanın (Sarı, Altun ve Aşkar, 2007) kanıtlama sürecini incelemeye yönelik olarak yapıldığı ancak kanıtlama becerisinin nasıl geliştirilebileceği konusunun araştırılmadığı görülmektedir.

Bu çalışma kanıtlama becerilerinin geliştirilmesini destekleyen öğrenme-öğretme ortamlarının düzenlenmesine yönelik önerilerde bulunması, ileride bu konuda yapılacak olan diğer araştırmalara yol göstermesi ve matematik eğitimi alanına sağlayacağı katkı bakımından önemlidir.

Yöntem

Çalışma nitel olarak tasarlanmış ve verilerin toplanması ve analiz edilmesi süreçlerinde nitel yöntemler kullanılmıştır. Nitel yöntemler, araştırmacının olguları değiştirmeye çalışmadan doğal ortamında inceleyerek, konuları derinlemesine ve ayrıntılarıyla çalışmasını kolaylaştırmaktadır (Patton, 2002). Nitel çalışmalarda nesnellikten çok bakış açısı ön plana çıkmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu bakımdan nitel araştırmaların çıktılarının betimleme, yorumlama, doğrulama ve değerlendirme olarak dört kategoriye ayrılabileceği ve yorumlamanın sadece yeni kavramlar yaratmak olmadığı, var olanları da incelemeyi içerdiği ifade edilmektedir (Peshkin, 1993).

Bu çalışmada öğretmen adaylarının, kanıtlama sürecinde karşılaştıkları güçlükler belirlenmiş, sosyal etkileşimin ve öğrencilerin kanıtlama deneyimi yaşamalarının sağlandığı bir ortamda, kanıtlama becerilerinin nasıl değişme gösterdiği ayrıntılı bir şekilde incelenmiş ve yorumlanmaya çalışılmıştır.

Araştırma sürecinde, çalışmanın amacına uygun olduğu düşünülen nitel yöntemler benimsenmiş ve matematik eğitimi araştırmalarında son yıllarda sıklıkla kullanılan öğretme deneyi yöntemi uygulanmıştır. Öğretme deneyi yöntemi, Piaget'in klinik görüşmelerinden yola çıkılarak geliştirilmiştir (Steffe & D'Ambrosio, 1996; Steffe, 1983). Öğretme deneyi, bir dizi öğretme olayı ve uzun süreli görüşmelerden oluşur (Cobb & Steffe, 1983). Öğretme deneyinde araştırmacı aynı zamanda öğretmendir ve öğretmen/araştırmacı ile katılımcılar arasında uzun süreli etkileşim söz konusudur. Araştırmacı ve öğretmen arasındaki tek fark, öğretme deneyinde, araştırmacının daha az sayıda öğrenci ile etkileşime girmesi ve onların davranışlarını anlamak için daha çok zamanı ve fırsatı olmasıdır (Cobb & Steffe, 1983). Öğretme deneyleri bir veya birden fazla öğrenci ile gerçekleştirilebilir (Brown, 2003). Birden fazla öğrenci ile gerçekleştirilen öğretme deneyleri sınıf ortamının taklit edilmesi gibidir (Engelhardt, Corpuz, Ozimek & Rebello, 2004). Bu tür öğretme deneyi çalışmalarında veriler genelde niteldir ve klinik görüşmeler, gözlemler, öğretme olaylarının kayıtları bu nitel verileri oluşturur (Knuth & Elliot, 1997). Öğretme olayları, öğretmen/araştırmacı, gözlemci, incelenen öğrenciler ve öğretme olayı süresince yapılan kayıtları içerir ve bu kayıtlar öğretme deneyinin geçmişe dönük analizinin yapılmasında kullanılır (Steffe & Thompson, 2000).

Çalışma Grubu

Çalışma, Ankara'daki bir devlet üniversitesinin Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı'nda, 2008-2009 öğretim yılı bahar döneminde, dördüncü sınıf öğrencileriyle gerçekleştirilmiştir. Katılımcıların belirlenmesi amacıyla 25 öğretmen adayına araştırmacılar tarafından hazırlanmış olan ölçme aracı uygulanmıştır. Çalışma, ders saatleri dışında gerçekleştirildiğinden, sürekliliğin ve öğrencilerin aktif katılımının sağlanması açısından gönüllü olmalarına önem verilmiştir. Ayrıca yürütülecek öğretme deneyindeki sınıf çalışmalarında, heterojen grupların oluşturulması planlandığından ölçme aracına verdikleri yanıtlara göre matematiksel kanıtla ilgili farklı bilgi ve beceri düzeyindeki altı öğrenci seçilmiştir. Uygulanan ölçme aracına verilen yanıtlara göre bir değerlendirme yapılmış ve bu değerlendirmeye göre, kanıt yöntemlerini tanıdığı ve mantıksal soruları yanıtladığı halde geçerli kanıtlar oluşturamayan, geçerli kanıtlar oluşturan ancak mantık bilgisine ve kanıt yöntemlerine ilişkin sorulara tutarsız yanıtlar veren, soruların büyük kısmını yanlış yanıtlayan veya sorulara genel olarak doğru yanıtlar veren öğrenciler belirlenmiştir. Çalışmanın katılımcıları, dördüncü sınıfa devam ettiklerinden matematik öğretmenliği programının ilk 3,5 yılını tamamlamış yani matematik alan derslerini almış ve alan eğitimi derslerini almakta olan öğrencilerdir.

Verilerin Toplanması

Araştırmanın verilerini, çalışmanın başında yazılı olarak uygulanan ölçme aracına öğrencilerin verdikleri yanıtlar, öğretme deneyinin öğretme olayları bölümünü oluşturan sınıf çalışmalarıyla, öğretme olayları öncesinde ve sonrasında yapılan bireysel görüşmelerin ses ve video kayıtları, öğrencilerin çalışma kağıtları ve araştırmacının gözlem notları oluşturmaktadır. Veriler, yazılı uygulama, birinci bireysel görüşmeler, ikinci bireysel görüşmeler, beş hafta süren öğretme olayları (sınıf çalışmaları) ve son bireysel görüşmeler şeklindeki sırayla beş aşamada toplanmıştır. Çalışmanın öğretme olayları bölümünde, sınıfta bulunan bir gözlemci video kaydını gerçekleştirmiştir. Nitel araştırmalarda, görüşme, gözlem ve doküman analizi gibi farklı yöntemlerle elde edilen verilerin birbirlerini teyit amacıyla kullanılması inandırıcılığı; farklı veri kaynakları, farklı veri toplama araçları ve analiz yöntemleri kullanılarak yapılan çeşitleme de sonuçların geçerliğini ve güvenirliğini arttırmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu araştırmada da yazılı dokümanlarla, görüşmelerle ve video kayıtlarıyla, farklı veri toplama yöntemlerinden yararlanılarak veri çeşitlemesi yapılmış ve çalışmanın inandırıcılığını arttırmak, geçerlik ve güvenirliğini sağlamak amaçlanmıştır.

Ölçme aracını3n hazırlanması

Çalışmanın başında öğrencilere uygulanan ölçme aracı, bu alanda yapılmış olan çalışmaların taranması (Atwood, 2001; Bedros, 2003; Goetting, 1995; Riley, 2003; Saeed, 1996), ilgili ders kitaplarının incelenmesi (Chartrand, Polimeni & Zhang, 2008; Sundstrom, 2003; Özer, Çoker & Taş, 1999) ve deneyimli öğretim elemanlarının görüşlerinin alınması sonucunda araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Ölçme aracında toplam 14 soru yer almaktadır. Bu sorulardan üçü belli bir kanıt yöntemine vurgu yapılarak kanıtlanması istenen önermelerden, üç tanesi de herhangi bir yönteme vurgu yapılmadan öğrencilerin kanıtlaması beklenen koşullu önermelerden oluşmaktadır. Diğer sorular ise, verilen bir koşullu önermede hipotez ve hükmü belirleme, uygulanabilecek kanıt yöntemlerini tanıma ve verilen alternatif kanıtların geçerliliğini belirleme türünde sorulardır.

Ölçme aracı hazırlanmadan önce, öğrencilerde kanıtlarla ilgili olarak sık karşılaşılan güçlükler, kanıtları anlama ve kanıtlamada gerekli olan bazı temel beceriler belirlenmiştir. Verilen bir önermede hipotez ve hükmü belirleme; önermenin değilini, tersini, karşıt tersini bulma ve bunların doğruluk değerlerini belirleme; verilen kanıtların geçerliliğini kontrol etme; olmayana ergi, karşıt ters ile kanıt ve doğrudan kanıt yöntemlerini tanıma ve koşullu önermeleri bu yöntemleri kullanarak kanıtlama, öğrencilerin sahip olması beklenen becerilerdir. Sorular, verecekleri yanıtlara göre, öğrencilerin bu becerilere sahip olup olmadıklarını belirleyecek ve varsa güçlüklerini, yanlış bilgilerini ortaya çıkaracak nitelikte olmasına dikkat edilerek hazırlanmış ve son olarak, amaca uygunlukları ve kullanılan matematiksel dil bakımından biri profesör ve ikisi yardımcı doçent olmak üzere alanda yetkin üç öğretim üyesi tarafından incelenmiştir. Ölçme aracı ilk önce, kullanılan dil bakımından anlaşılırlığı ve soruların yeterliliğini belirlemek üzere 35 son sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Ölçeğin ilk halinde yer almayan, herhangi bir yönteme vurgu yapılmadan öğrencilerin kanıtlaması beklenen üç önerme bu uygulama sonucunda ölçme aracına eklenmiştir. Bazı yazım düzeltmeleri de yapılarak uygulanacak ölçme aracı son şeklini almıştır.

Ön ve son bireysel görüşmeler

Ölçme aracının yazılı olarak uygulanması sonrasında belirlenen altı katılımcıyla gerçekleştirilen ön bireysel görüşmelerde öğrencilere, soruları yanıtlarken nasıl düşündüklerini açığa çıkarmaya yönelik sorular yöneltilmiş, verdikleri yanıtları kontrol etmeleri ve yanıtlarının nedenlerini açıklamaları istenmiştir.

İkinci görüşmede öğrencilerin kanıtları oluşturma süreçlerine ilişkin daha ayrıntılı bilgi elde etmek ve nasıl düşündüklerini belirlemek amacıyla iki koşullu önerme verilmiş ve sesli düşünerek kanıtlamaları istenmiştir.

Beş haftalık sürecin sonunda, öğretme olayları tamamlandıktan sonra, öğrencilerin her biriyle birer klinik görüşme yapılmıştır. Bu görüşmelerde öğrencilere, çalışmanın başında uygulanan ölçme aracında bulunan ve ön görüşmelerde kullanılan önermelerden bazıları, özellikle öğrencinin kanıtlamada güçlük çektiği veya kanıtlayamadığı önermeler tekrar verilmiştir. Öğrencilerden verilen önermeleri sesli düşünerek kanıtlamaya çalışmaları istenmiştir. Araştırmacı kanıtlama sürecinde öğrencilere müdahalede bulunmamış, sadece sessiz kaldıkları veya açıklama yapmadan yazdıkları durumlarda düşüncelerini sesli ifade etmelerini ve yazdıklarını açıklamalarını sağlamak için uyarılarda bulunmuştur.

Sınıf çalışmaları

Ölçme aracı uygulandıktan ve her bir katılımcıyla ikişer bireysel görüşme yapıldıktan sonra, öğrencilerin mevcut durumlarının belirlenmesinin ardından sınıf ortamında grup çalışması sürecine girilmiştir. Öğretme deneyinin öğretme olayları bölümünü oluşturan sınıf çalışmaları, öğrencilerle haftada bir gün 1,5 saat yani iki ders saati süresince bir araya gelinerek gerçekleştirilmiştir. Sınıf çalışmalarında öğrencilere nadiren bireysel, ağırlıklı olarak gruplar halinde çeşitli kanıt görevleri verilmiştir. Araştırmacı, her hafta için belli bir konu kapsamında bazı önermeleri ve bu önermelerin kanıtlanmasında kullanılacak olan tanımları içeren çalışma kağıtları hazırlamıştır. Öğrenciler 4. sınıfa devam etmekte oldukları için matematikle ilgili alan derslerini almışlardır ve çalışmada yer alan konulara yabancı değillerdir. Ancak yine de öğrencilerin bilgi eksikliğinden dolayı kanıtlama güçlüğü çekmelerini önlemek amacıyla konu ile ilgili gerekli bilgiler verilmiştir.

Öğretme olayları boyunca, öğrenciler, tek başlarına veya üç kişilik iki grup halinde çalışmışlardır. Bu çalışmalar süresince, önermeleri kanıtlama; kanıtları sınıfa sunma, birlikte tartışma ve açıklamalar yapma; birbirlerine sorular sorma ve birbirlerini ikna etmeye çalışma gibi kanıtlama deneyimi yaşamalarına yönelik ve öğrenciler arası etkileşimin ön planda olduğu etkinlikler gerçekleştirmişlerdir.

Öğretmen/araştırmacı, öğrencilerin alışık olduğu tarzdaki öğretmen modelinden farklı olarak, sınıfta otorite konumunda olmamış ve ders anlatmamıştır. Öğrencilere mümkün olduğunca az müdahalede bulunmuş, sadece gerekli gördüğü durumlarda, ortaya atılan düşünceleri daha açık ve anlaşılır hale getirmek adına, sorular ve hatırlatmalarla öğrencilere rehberlik etmeye çalışmıştır. Öğrencilerin çıkmaza girdikleri veya önemli bir noktayı gözden kaçırdıkları anlarda "*Tanımı tekrar hatırlayın isterseniz. Bakın arkadaşınız ne diyor, siz ne düşünüyorsunuz?, Göstermeye çalıştığımız neydi?, Yazılanlar yeterince açık ve ikna edici mi sizce?*" gibi uyarılar ve sorularla daha dikkatli düşünmelerini sağlamaya çalışmış ancak hiçbir zaman doğru veya yanlış gibi değerlendirmelerde bulunmamıştır.

Verilerin Analizi

Ses ve video kayıtları, öğrencilerin çalışma kağıtları ve araştırmacının gözlemleri, araştırmanın nitel verilerini oluşturmaktadır. Verilerin analizi sürecinde, dokümanlar incelenmiş, görüşme ve video kayıtlarının çözümlemesi yapılmıştır. Çözümleme, öğrencilerin söylediklerinin yazıya aktarılması sürecini ifade etmektedir. Öğrencilerin birebir görüşmelerinde, yazdıklarına odaklanılarak yapılan video kayıtları, araştırmacılar tarafından dikkatle izlenmiş; dokümanlar, video görüntüleri ve öğrencilerin söyledikleri birlikte incelenerek toplanan tüm verilerin karşılaştırılması ve birbirini teyit etmesiyle sonuçlar elde edilmiştir.

Nitel araştırmalarda veri analizinde betimleme, analiz ve yorumlama süreçleri ön plana çıkmaktadır. Betimleme, toplanan verilerin araştırma problemine ilişkin neler söylediğini ya da hangi sonuçları ortaya koyduğunun belirlenmesini; analiz, doğrudan görülemeyen ancak kavramsal kodlama veya sınıflama yoluyla anlamlı ilişkilerin ortaya çıkarılmasını; yorumlama ise verilerin anlamlarının ön planda olduğu anlamlandırma sürecini belirtmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Öğrencilerden toplanan yazılı dokümanlar ve yapılan bireysel görüşmeler, her bir öğrencinin kanıtlama sürecinin betimlenmesinde kullanılmıştır. Başta ve sonda yapılan görüşmelerde yer alan ortak sorularla, öğrencilerin çalışmadaki ilerlemesi değerlendirilmiştir. Sınıf çalışmalarındaki video kayıtlarının çözümlenip analiz edilmesinde Powell, Francisco ve Maher (2003) tarafından önerilen analitik model temel alınmıştır. Öğrencilerin güçlükleri, verilerin analizi sonucunda alan yazındaki çalışmalar ışığında tanımlanmış ve yorumlanmıştır.

Bulgular ve Yorumlar

Öğrencilerin gerçek isimleri yerine, katılımcıların gizliliği açısından takma isimler kullanılmıştır. Bulguların sunulmasında, öğrenci görüşmelerinden doğrudan alıntılara ve çalışma kağıtlarından ilgili bölümlerin görüntülerine yer verilmiştir.

Sınıf çalışmaları öncesinde uygulanan ölçme aracı ve katılımcıların her biriyle ikişer defa gerçekleştirilen bireysel görüşmeler, öğrencilerin kanıtlamaya ilişkin çeşitli güçlüklerini ortaya çıkarmaktadır. Çalışmanın başında, katılımcılardan dördünün, koşullu bir önermenin kanıtında kullanılabilecek kanıt yöntemlerine ilişkin bilgilerinin eksik olduğu ve karşıt ters ile kanıt yöntemini tanımadıkları görülmüştür. Öğrencilerin, verilen bir önermeye ilişkin alternatif kanıtlardan geçerli olanları belirlemeleri istenen soruda karşıt ters ile kanıt yöntemiyle yapılmış olan geçerli kanıtları eksik olarak değerlendirdikleri ve verilen kanıtı, varsayıma ekleme yaparak olmayana ergi kanıt yöntemine benzetmeye çalıştıkları görülmüştür. Katılımcılardan Veli, karşıt ters ile kanıt yöntemiyle yapılmış olan geçerli kanıtı yanlış olarak değerlendirme nedenini şu şekilde açıklamıştır.

> *"Bunu daha güzel yazabilirdi sanki, olmayana ergi ile başlıyor, sonuçta çelişki elde edelim diye zihninde tasarlamış olabilir. Yani satır eksik gibi o yüzden eksik olduğunu düşündüm."*

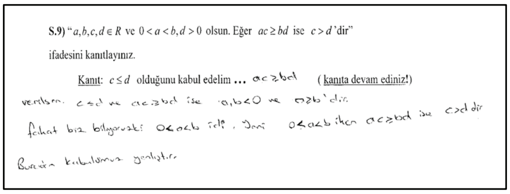
Emre de geçerli kanıtı yanlış olarak değerlendirmiş olmasını benzer şekilde gerekçelendirmiştir.

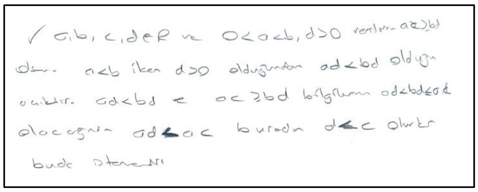
> *"Burada ben dedim ki ikinci kısımda* (önermenin hükmü) *çelişkiye düşecek galiba, ikinci kısmın değilini almış, sonuçta çelişkiye düşmesi lazım. Burada şu yanlış geldi bana, şunun* (önermenin hipotezi) *tersini elde ediyor ama çelişkiyi ifade etmiyor. O yüzden bana yanlış geldi"*

Çalışmanın sonundaki bireysel görüşmelerde öğrencilerden, koşullu bir önermenin nasıl kanıtlanabileceğini açıklamaları istenmiş ve tüm katılımcılar doğrudan kanıt, olmayana ergi ve karşıt ters ile kanıt yöntemlerini uygulanışlarıyla birlikte doğru bir biçimde açıklamışlardır.

Bu durum öğrencilerin başlangıçta, önermelerin kanıtlarına yönelik olarak yazdıkları ifadelerde matematiksel dil ve notasyonu doğru kullanamadıklarını, hipotezi ve hükmü belli olan geçerli bir kanıt çerçevesi oluşturamadıklarını göstermiştir. Ayrıca ön bireysel görüşmelerde, düşüncelerini ve sözel ifade ettikleri açıklamalarını yazıya dökemedikleri ve yazdıklarını doğru bir biçimde gerekçelendiremedikleri görülmüştür.

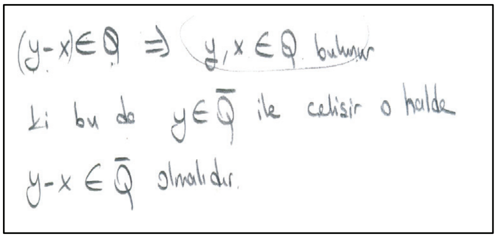
Örneğin, Emre'nin yazılı uygulamadaki soruya başlangıçta verdiği yanıt incelendiğinde (Şekil 1a) kanıt olarak kabul edilebilecek herhangi bir şey yazmadığı, sözel olarak bazı açıklamalar yapmaya çalıştığı ama yazdıklarını gerekçelendiremediği ve açıklamanın matematiksel bir anlam taşımadığı görülmektedir. Aynı soru son görüşmede tekrar sorulduğunda ise daha dikkatli düşünerek kanıtlamaya çalışmış ve geçerli bir kanıt oluşturmuştur (Şekil 1b).

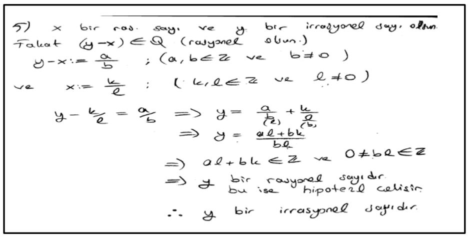




Şekil 1a. Emre'nin yazılı uygulamadaki yanıtı
Şekil 1b. Emre'nin son görüşmedeki yanıtı

Veli'nin ölçme aracında yer alan "*Eğer x bir rasyonel sayı ve y bir irrasyonel sayı ise y-x bir irrasyonel sayıdır*" ifadesinin kanıtı için yazdığı (Şekil 2a), önermedeki hipotez ve hükmün ne olduğunu, gerekçelendirmeyi içermeyen, dolayısıyla matematiksel kanıt değeri taşımayan bir açıklamadır. Son görüşmede aynı ifade kanıtlaması için verildiğinde Veli geçerli bir matematiksel kanıt oluşturmuştur (Şekil 2b).





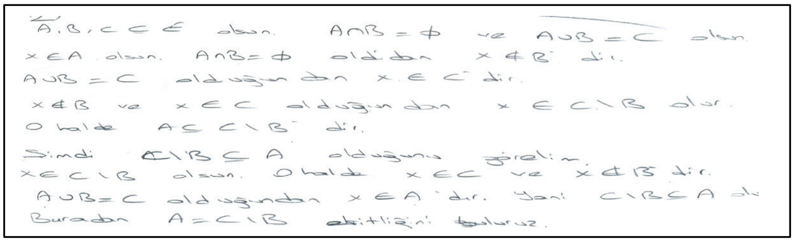
Şekil 2a. Veli'nin yazılı uygulamadaki yanıtı

Ş*ekil 2b*. Veli'nin son görüşmedeki yanıtı

Katılımcılardan Emre, Melis ve Pelin bazı sorularda, önermenin doğru olduğunun zaten rahatlıkla görüldüğünü ve matematiksel olarak nasıl gösterilebileceğini bilemediklerini belirtmişlerdir. Selden ve Selden (2007), öğrencilerin basit kanıtları istenen tarzda yazamaması olarak açıkladıkları bu güçlüğü aşikarlık engeli olarak ifade etmişlerdir. Örneğin Pelin çalışma öncesi gerçekleştirilen ikinci bireysel görüşmede verilen "*A,B,*$\subseteq$ *E olsun. Eğer A*$\cap$*B=*$\varnothing$ *ve A*$\cup$*B=C ise A=C \ B dir*" önermesini kanıtlamakta güçlük çekmiş ve bu güçlüğün nedenini:

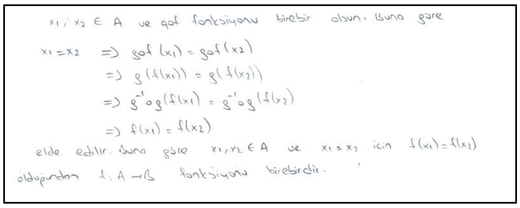
> *"Yani direk doğru olduğunu gördüğüm için gerçekten şey yapamıyorum. (…) Mesela şey problemi de yaşıyoruz hepimiz.(…) Hani o kadar doğru geliyor ki aralara bir şeyler yazamıyoruz"*

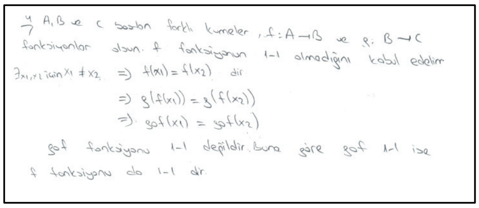
şeklinde açıklamıştır. Çalışma öncesi önermeyi geçerli bir biçimde kanıtlayamayan Pelin son görüşmede aynı önermeyi kanıtlaması istenildiğinde ilk görüşmeden farklı olarak soruyu dikkatle okumuş, eşitliği kanıtlamak için çift taraflı kapsamayı göstermesi gerektiğini belirtmiş ve düşündüklerini matematiksel olarak doğru bir biçimde ifade ederek geçerli bir kanıt oluşturmuştur (Şekil 3).



Şekil 3. Pelin'in son görüşmede, 2. görüşmedeki 2. soruya yanıtı

Katılımcılarda görülen bir diğer sorun ise verilen önermeyi kanıtlarken hipoteze ekleme yapmaları veya sonucu varsayarak kanıta başlamalarıdır. Örneğin katılımcılardan Melis ölçme aracında yer alan, "*A, B ve C boştan farklı kümeleri için f: A→B ve g: B→C fonksiyonlar olsun. g○f birebir fonksiyon ise f fonksiyonu da birebirdir*." ifadesini kanıtlamaya çalışırken önermede, g fonksiyonunun birebir ve örtenliği ile ilgili bir bilgi bulunmadığı halde g^{-1} fonksiyonunun varlığını kabul etmiş ve g◎f fonksiyonu ile bileşkesini alarak f fonksiyonunu elde etmiş ve buradan f 'nin de birebir olduğunu söylemiştir (Şekil 4a).





Şekil 4a. Melis'in ölçme aracındaki yanıtı

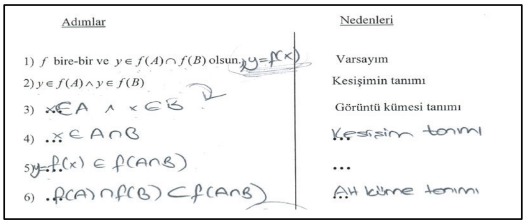
Şekil 4b. Melis'in son görüşmedeki yanıtı

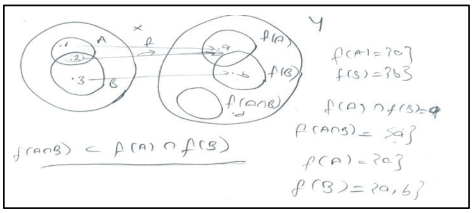
Yazılı uygulamada verdiği yanıtta Melis'in birebirlik tanımını da yanlış kullandığı görülmektedir. Ancak aynı soru son görüşmede sorulduğunda birebirlik tanımını doğru kullanmış ve önermeyi geçerli bir biçimde kanıtlamıştır (Şekil 4b).

Öğrencilerin tanım ifadesini bildikleri halde tanımı kanıtta kullanamadıkları, özellikle fonksiyonlarla ilgili önermelerde birebirlik tanımını kanıtın hangi aşamasında, ne şekilde kullanabileceklerini belirlemekte güçlük çektikleri görülmüştür.

Ölçme aracındaki 10. soruda öğrencilerden, "*$f: X \to Y$ ve $A, B \subset X$ olsun. Eğer f fonksiyonu birebir ise $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ dir.*" önermesinin kanıtını adım adım gerekçelendirerek yazmaları istenmiştir. Katılımcılardan Derya ifadeyi geçerli bir biçimde kanıtlayamamış (Şekil 5a), yazdıklarını gerekçelendirememiş ve birebirlik tanımını kanıtın hangi aşamasında, nasıl kullandığını açıklayamamıştır. Görüşmede, yazdığının doğruluğundan emin olmadığını ve soruyu yanıtlamakta güçlük çektiğini belirtmiştir.

> "*Ben bunu çözerken de çok aklımda net bir şekilde çözmedim yani (…). Emin olamadım açıkçası. Çünkü birinci sınıfta da sorunlar yaşıyordum, buradan bunu yazabilir miyim* (2. satırdan 3. satıra geçiş) *ondan çok emin olmadan yapıyordum.*"





Şekil 5a. Derya'nın ölçme aracındaki yanıtı

Şekil 5b. Derya'nın son görüşmede çizdiği şekil

Son görüşmede ise bu soruda verilen önermeyi geçerli bir biçimde kanıtlamış, hangi aşamada kullanacağını belirlemek için şekil (Şekil 5b) çizmiştir. Birebirliğin tanımını kullanarak ve birebir olmasa ne olurdu diye düşünerek hareket etmiştir.

> "*Bizim bir y 'miz var mesela bu y hem f(A)'da hem f(B)'de* (bunu çizdiği kümelerin kesişiminde gösteriyor) *şimdi bu birebir olmazsa buna başka bir x de gelebilir mesela. Yani buradan* (tanım kümesi) *iki eleman y 'ye gitmiş olabilir mesela birebir olmasa, o zaman biz burada birebirliği kullanmış oluyoruz.*"

şeklinde yaptığı açıklamalarla önermeyi kanıtlamıştır.

Sınıf çalışmalarının birinci ve üçüncü haftasında öğrencilere kanıtlamaları için verilen önermeler arasında da fonksiyonlarla ilgili önermeler yer almaktadır. Öğrenciler bu önermeleri kanıtlamaya çalışırken birebirlik tanımını kullanmakta, kanıtlarındaki adımları gerekçelendirmekte güçlük çekmiş ve hep birlikte tartışarak sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Örneğin, çalışma kağıdında yer alan *"f: X→Y bir fonksiyon ve A⊂X olsun. f birebir ise* $f(X\setminus A) \subset Y\setminus f(A)$ *olur."* önermesinin kanıtını öğrenciler önce kendi gruplarında tartışmışlardır. Derya, Emre ve Melis'ten oluşan grup,

Melis: Birebirliği nasıl kullanacağız?

Derya: Bir çizeyim mi, ister misiniz?

Melis: Çizelim, ben de çiziyorum.

Emre: Ya şey yapalım, tanımdan gidelim bence

Derya: Niye? Bir görelim.

Emre: Ben diyorum ki tanımdan gidelim, birbirlerinden farklı iki eleman seçelim, bunların görüntülerinden gitmez miyiz? Yani tanımı kullansak birebirliği

Derya: Ya şundan (f(X\A) 'yı kastediyor*) bir eleman alıp şunda (Y\f(A)'* yı kastediyor*) olduğunu göstermeyecek miyiz?*

şeklinde tartışarak $f(x)\in f(X\setminus A) \Rightarrow x \in X\setminus A \Rightarrow x \notin A \Rightarrow f(x)\notin f(A)$ *ve* $f(x) \in Y\setminus f(A)$ ifadelerini yazmışlar ancak fonksiyonun birebir olmasını hangi aşamada kullanmaları gerektiğine karar verememişlerdir. Daha sonra yazdıklarından emin olmadıklarını ve düşüncelerini diğer grupla paylaşmak istediklerini belirtmişlerdir.

Derya: Netleştiremediğim şey, biz y değil de f(x) dediğimiz için birebirliğe falan hiç gerek kalmadı. Ben y mi yazacağız f(x) mi yazacağız karıştırdığım için soruyorum, yani f(x)∈ f(X\A)⇒ x∈ X\A dedik görüntü kümesi tanımından ama y alsaydık diyemezdik işimize böyle geldi f(x) aldık.

Melis: Bence bir y∈ f (X\A) alalım sonra birebirlikten dolayı bir tane x∈ X\A olduğunu yazalım.
Veli: Sanki az önceki gibiyken de böyle bir şey olması gerekiyor. f(x)∈ f(X\A) ise x∈ X\A diyemezsin, başka bir eleman tarafından meydana getirilmiş olma şansı var bence.

Derya: Şöyle yapalım çizelim aslında

Derya: Peki x, A'da değilse, f(x), f(A)'da değil midir? (şekil üzerinde de göstererek soruyor)

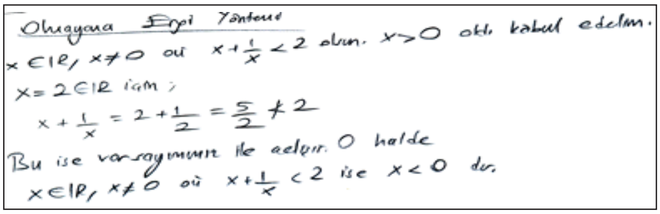
Melis: Çünkü başka bir eleman da f(x) olabilir.

Melis: Başka bir a elemanı olsa A kümesi dışında mesela, A'nın dışında başka bir eleman da f(x)'e gidebilir birebir olmasa

Bu şekilde birbirlerine sorular sorarak, tartışarak ilerleyen öğrenciler, tahtaya kalkarak birbirlerine açıklamalar yapmış ve sonuçta fikir birliğine vararak geçerli bir kanıt oluşturmuşlardır. Melis ve Derya son bireysel görüşmelerde fonksiyonlarla ilgili önermelerin kanıtında yaşadıkları güçlüğü sınıf tartışmalarında giderdiklerini belirtmişler ve ön görüşmelerde yanıtlayamadıkları ya da yanlış yanıtladıkları soruları son görüşmede doğru yanıtlamışlardır. Son görüşmelerde Veli ve Emre'nin de birebirlik tanımını doğru kullandıkları görülmüştür. Pelin ise bu güçlüğü giderememiş, bunun gerekçesi olarak da tartışmalar sırasında yapılanları anlamasının, kendi başına uygulayabilmesi için yeterli olmaması şeklinde açıklamıştır.

Katılımcılardan Cem, önermelerin kanıtlarında genellikle olmayana ergi yöntemini tercih etmiş ve yönteme çok fazla odaklandığından, yöntemin prosedürel bilgisini kullanarak bir çelişki bulmak için uğraşmıştır. Bazı önermeler için bu yöntemle geçerli kanıtlar elde etmesine rağmen, kimi zaman çelişki elde etmeye çalışırken mantıksal hatalar yapmış, yazdıklarını sezgisel olarak anlamlı biçimde gerekçelendirememiştir. Örneğin ikinci görüşmede verilen *"*$x \in \mathbb{R}$ *ve* $x \neq 0$ *olsun. Eğer* $x + 1/x < 2$ *ise* $x < 0$ *dır."* önermesine verdiği yanıtta (Şekil 6) seçtiği sıfırdan büyük bir sayı değeri için varsayımla çelişen bir durum ortaya çıktığını ve bu çelişkinin, verilen önermenin doğruluğunu kanıtladığını düşünmüştür. Cem, varsayımı sağlamayan bir örnek alarak mantıksal hata yapmış ve geçerli bir kanıt oluşturamamıştır. Ancak yazdığının doğru olduğunu düşündüğünü belirtmiş ve şu açıklamayı yapmıştır.

"Amacım çelişki elde etmek ve varsayımlardan x=2 değerini verince bu koşullarda sağlanmıyor demek ki x bu koşullarda (önermenin hipotezi) *sıfırdan büyük olamaz"*



Şekil 6. Cem'in 2. görüşmedeki 1. soruya yanıtı

Veli ve Cem sınıf çalışmalarında aynı grupta yer almışlardır. Bu çalışmalar sırasında Cem'in önermelerin kanıtlarında olmayana ergi yöntemini kullanmak konusunda ısrarcı olduğu Veli'nin ise olmayana ergi yöntemini kullanmaktan kaçındığı ve elde edilen çelişkiyle kanıtlanmış olmasında tereddüt yaşadığı görülmüştür.

Veli: Bir dakika ne yapmaya çalışıyoruz?
Cem: Çelişki yakalayacağız
Veli: Nasıl bir çelişki?
Cem: Ya bir çelişki yakalayacağız sen devam et
Veli: Ama bana şey geliyor işte, şunun (varsayımı kastediyor) *üzerinden gidip de şunun üzerinden çelişki bulmak*
Cem: Hayır hayır illa varsayımla çelişki olmak zorunda değil olmayana ergide

Ön bireysel görüşmelerde ve sınıf çalışmalarının ilk haftalarında olmayana ergi kanıt yöntemini kullanmakta güçlük çeken Veli'nin son görüşmedeki önermelerin kanıtlarında bu yöntemi kullandığı görülmüştür. Veli son görüşmede, olmayana ergi yöntemini genelde tercih etmediğini ancak sınıf çalışmaları sırasında bu yöntemi benimsediğini belirtmiştir.

Öğrencilerin, kanıt kavramı ve bir kanıtın geçerliliğinin değerlendirilmesi ile ilgili bilgilerinin yetersiz ve yanlış olduğu görülmüştür. Öğrencilerden Emre, Pelin ve Veli yazdıkları yanıtlar, yanlış ve eksik olsa da kanıt olarak kabul edilebileceğini ve bir kanıtın geçerliliğinin değerlendiren kişiye bağlı olarak belirleneceğini ifade etmişlerdir. Emre'nin "*Benim mantığıma göre kabul edilebilir, çünkü düşüncelerimi açıklıyor*", Veli'nin "*Bilemem, biri beğendim der biri beğenmedim der*", Pelin'in "*Bir öğrenci okusa anlar da hoca okursa kabul etmeyebilir*" gibi kanıta yönelik olarak kendi yazdıkları yanıtlarla ilgili ifadeleri, kanıt kavramlarına ilişkin yetersizliklerini ortaya çıkarmıştır. Bu durum, başka çalışmalarda da ortaya çıkan öğrencilerin kanıtı üçüncü bir kişi okuduğu zaman ikna edici olması gerektiği sosyal yönünü göz önünde bulundurmayarak kendileri için yeterince ikna edici bir argümanla yetindikleri (Gholamazad, 2005) sonucunu desteklemektedir. Ancak sınıf çalışmalarının dördüncü haftasında birbirlerinin kanıtlarının geçerliliğini kontrol etmeleri istenen etkinlikte, öğrencilerin kanıtın geçerli olması için nelere dikkat edilmesi gerektiğini doğru değerlendirdikleri, kanıtların düzgün ve anlaşılır olmasına daha çok dikkat gösterdikleri ve kabul edilebilir kanıtlar oluşturmak için çaba harcadıkları görülmüştür.

Sınıf çalışmalarının üçüncü haftasında öğrencilere kanıtlamaları beklenen önermelerin ve ihtiyaç duyacakları düşünülen tanımların yer aldığı çalışma kağıtları dağıtılmış ve bireysel olarak çalışmaları istenmiştir. Öğrenciler *"S ve T boştan farklı ve sınırlı iki reel sayı kümesi olsunlar. Eğer her s∈ S sayısı her t∈ T sayısından küçük veya eşit ise supS ≤ supT olur*" önermesinin kanıtıyla bireysel olarak uğraşırlarken Melis, aklına takılan bir soruyu sesli olarak dile getirmiş bunun üzerine öğrenciler sorunun yanıtını tartışmaya başlamışlardır.

Melis: "Küme sınırlı olduğu zaman en küçük üst sınırı kümenin en büyük öğesine mi eşit oluyor?

Cem: Tanımdan dolayı küçük eşittir olduğu için, oradaki (en küçük üst sınır tanımını kastediyor) *eşitlik olduğu için sonuçta sınırlı, en büyük öğe en küçük üst sınır olacaktır.*

Derya: Bence değildir. Mesela (0,1) aralığını düşünürsek en küçük üst sınır 1 'dir ama 1 aralığın elemanı değil.

Veli: Eküs'ün kümeye ait olması gerekmiyor.

Öğrenciler tartışma sonrasında en küçük üst sınırın, kümenin elemanı olması gerekmediği konusunda fikir birliğine varmışlardır. Daha sonra Melis kanıtı tamamlayamadığını ancak düşündüklerini paylaşmak istediğini belirterek kanıtlarken nerede güçlük çektiğini açıklamak için tahtaya kalkmıştır. Melis gibi düşündüklerini ifade eden Cem ve Derya da sonuca ulaşamadıklarını belirtmişlerdir. Bunun üzerine önermeyi kolayca kanıtladığını söyleyen Veli tahtaya kalkmış ve arkadaşlarını ikna etmiştir.

Öğrencilerin bireysel çalışmaları beklenen durumda bile arkadaşlarına soru sormak, onlarla fikirlerini paylaşmak ihtiyacı hissettikleri gözlenmiştir. Etkileşimli sınıf ortamı, bireysel görüşmelerde kanıtla uğraşırken kendilerini rahat hissetmediklerini belirten öğrencilerin, sürece aktif katılmalarına ve tartışarak kafalarındaki soru işaretlerini gidermelerine olanak sağlamıştır.

Sonuç ve Tartışma

Bu çalışma, dördüncü sınıfa devam etmekte olan ortaöğretim matematik öğretmen adayları ile gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının kanıtlama sürecinde karşılaştıkları güçlükler incelenmiş ve beş haftalık sınıf çalışmalarının, katılımcıların kanıtlama süreçlerini nasıl etkilediği araştırılmıştır. Çalışma süresince öğrencilerde görülen güçlükler; matematiksel dil ve notasyon, kanıt çerçevesi oluşturamama, kanıt yöntemleri bilgisi eksikliği, belli bir kanıt yöntemine odaklanma, kanıta başlayamama, mantıksal hata ve yetersizlikler, açıklayıcı kanıt oluşturamama ve gerekçelendirememe, uygun kanıt yöntemini belirleyememe, aşikarlık engeli, tanımı kullanamama, kanıtın geçerliliğini belirleyememe, yetersiz kanıt kavramı, hipoteze ekleme yapma veya sonucu varsayma, kanıt yazamama ve düşündüklerini anlaşılır biçimde ifade edememe şeklinde ortaya çıkmıştır.

Bu güçlükler alan yazındaki diğer çalışmaların sonuçlarını destekler niteliktedir. Katılımcılarda görülen, bilinen tanımı kanıtta kullanamama güçlüğü, tanımın öğrenciler için formel olarak uygulanabilir (formally operable) (Bills & Tall, 1998) olmadığının ya da stratejik bilgi (Weber, 2001) eksiklerinin olduğunun bir göstergesidir. Weber (2001), öğrencilerin tanım bilmekten öte tanımı ne zaman ve nasıl kullanacakları bilgisine ihtiyaçları olduğunu ifade etmiş, Selden ve Selden (2009) da çalışmalarında öğrencilerin, birebirlik kavramını sezgi ya da mantık yoluyla anlamış olsalar bile fonksiyonun birebir olduğunu nasıl göstereceklerini bilmiyor olabileceklerini belirtmişlerdir. Knapp (2006) da çalışmasında, tanımı bilen öğrencilerin doğru kullanamadıklarını görmüş ve bir kanıtta tanımı kullanabilmek için ne zaman ve nasıl kullanılması gerektiğini bilmenin önemli olduğunu ifade etmiştir. Bu çalışmada da, öğrencilerin birebirlik tanımını bildikleri durumda bile tanımı kanıtlarda kullanamadıkları ortaya çıkmıştır. Ancak sınıf tartışmalarında, akıllarındaki soru işaretlerini giderme olanağı buldukları ve bazı öğrencilerin bu güçlüklerinin son görüşmede ortadan kalktığı görülmüştür.

Öğrencilerde, eksik kanıt girişimlerini ve informel argümanlarını kanıt olarak kabul etme eğilimi görülmüştür. Bu açıdan öğrencilerin, bir argümanın matematiksel kanıt olabilmesi için, mantıksal notasyonun uygun yerde kullanılması ve kanıt yöntemini işaret eden belli biçimdeki kelimelerin yer aldığı, mümkün olan en açık şekilde yazılmış olması gerektiğinin (Weber & Alcock, 2009) farkında olmadıkları ve kanıt kavramlarının yetersiz olduğu söylenebilir. McCrone ve Martin (2009) de öğrencilerin, mantıksal sıradaki hataların, kanıtın geçersiz olmasına yol açmayacağını düşündüklerini; bunun, okullarda mantıksal hatalar olan yanıtlara puan verildiği durumlar olmasından ve doğru olmayan kanıt girişimlerine ve argümanlara da kanıt denilebilmesinden kaynaklandığını belirtmişlerdir. Bu çalışmada öğrencilerin kanıtların geçerliliğinin değerlendirmeyi yapan kişiye göre değişebileceğini düşünmeleri de, diğer çalışmalarda (Healy & Hoyles, 2000; McCrone & Martin, 2009) ifade edilen, öğrencilerin duruma ve dinleyen kişiye göre farklı standartlar ve yöntemler olabileceğine inandıkları; kendileri deneysel veya informel argümanlardan ikna olsalar da öğretmenin bu tür açıklamalara puan vermeyeceğini ve kabul edilebilir kanıtların genel, açıklayıcı ve matematiksel olarak geçerli argümanlar olması gerektiğinin farkında oldukları sonuçlarını desteklemektedir. Son görüşmelerde, öğrencilerin kanıtları yazarken daha dikkatli oldukları, kanıtlamaya çalışırken düşüncelerini kağıda aktarıp karalamalar yaptıkları, kanıtı oluşturduktan sonra yeni bir kağıda baştan düzgün bir şekilde yazmak istedikleri gözlenmiştir. Bu durum öğrencilerin, kanıtların belli bir düzende, açık ve anlaşılır biçimde, doğru sembol ve notasyon kullanımıyla yazılması gerektiğinin farkına vardıklarının bir göstergesi olarak düşünülebilir.

Ön ve son bireysel görüşmelerin ve sınıf çalışmalarının kayıtlarının, öğrencilerin çalışma kağıtlarının incelenmesi ve birlikte değerlendirilmesi sonucunda, katılımcıların tümünde kanıtlama süreci açısından farklı düzeylerde de olsa bir ilerleme gerçekleştiği görülmüştür. Bu ilerlemenin farklı düzeylerde olmasının, öğrencilerin sınıf tartışmalarına katılımları ve gösterdikleri çaba ile ilgili olduğu düşünülmektedir.

Çalışma sürecindeki bireysel görüşmeler ve sınıf çalışmaları, öğrencilerin kanıtlarla uğraşmalarına ve kanıtlama becerilerini geliştirmeye katkı sağlayan "öğrenme deneyimleri" olarak adlandırılabilir. Görüşmelerde, sorulara verdikleri yanıtlar üzerinde düşünmeleri, kendi yanıtlarını kontrol etmeleri, araştırmacının sorularıyla açıklama ve gerekçelendirme yapmak durumunda kalmaları, öğrencilerin öğrenmelerini destekleyici olmuştur. Sınıf çalışmalarında ürettikleri argümanları tartışmaları ve girdikleri etkileşimler, bireysel kanıtlama girişiminde bulunmaları, birbirlerinin argümanlarını değerlendirmeleri ve ortaya çıkardıkları kanıtların geçerliliğini kontrol etmeleri, öğrencilerin kanıtlama becerilerini geliştiren öğrenme deneyimleri olarak kabul edilebilir. Bu öğrenme deneyimleri, öğrencilerin başlangıçta sahip oldukları bazı güçlüklerinin giderilmesini sağlamış ve ezbere dayanmadan, akıl yürüterek, birlikte tartışarak kanıt oluşturabileceklerini görmelerine fırsat vermiştir. Öğrencilerin başlangıçta kanıtlayamadıkları önermeleri çalışmanın sonunda kanıtlayabilmeleri, bireysel olarak yanıtlayamadıkları soruları birlikte tartışarak yanıtlamaları ve işbirliğiyle geçerli kanıtlar oluşturmaları, uygulanan öğretme deneyindeki sosyal etkileşime dayalı sınıf ortamının, öğrencilerin kanıtla ilgili güçlüklerini gidermelerinde etkili olduğunu göstermektedir. Bu sonuç, tartışmaların, öğrencilerin fikirlerini test etmelerine, diğerlerinin fikirlerini duyup bunları bütünleştirmelerine, düşündüklerini söze dökmelerine ve anahtar kavramları daha derinlemesine anlayabilmelerine olanak verdiği (McCrone, 2005) ve öğrencilerin sadece bilgi kazanmalarını sağlamakla kalmayıp yeni davranışlar kazanmalarında da etkili olabildiği (Huber, 2003) belirtilen çalışmaları da desteklemektedir. Weber, Maher, Powell ve Lee (2008) de benzer olarak kanıtlama sürecinde grup tartışmalarının, öğrencilerin kanıtlama sürecinde iddialarını net bir biçimde ortaya koymalarını sağladığını ve belli bir argümantasyon yönteminin uygunluğunu tartışmalarını teşvik ettiğini, akıl yürütmeleri yanlışsa bunu düzeltmelerini sağlayacak ortamlar yarattığını belirtmektedirler. Bu çalışma da grup tartışmalarının öğrenmeye olumlu katkısını ve sosyal etkileşimin önemini vurgulayan çalışmalara (Cobb & Whitenack, 1996; Yackel, Cobb & Wodd, 1991; Weber et al., 2008) katkı sağlamakta ve akran etkileşiminin (Cesar, 1998), özellikle küçük grup tartışmaları şeklindeki öğretimin sunduğu öğrenme fırsatlarını ortaya çıkarmaktadır.

Öneriler

Matematiğin soyut ve kavramsal yapısını anlayabilmek için, doğru kanıt kavramına ve kanıtlama becerisine sahip olmak önemlidir. Bu durum özellikle, geleceğin matematik öğretmeni olacak öğretmen adaylarının kanıtla ilgili bilgi ve becerilerinin geliştirilmesi gerektiği sonucunu ortaya çıkarmaktadır. Katılımcıların, matematik alan derslerini tamamlamış oldukları halde kanıtlarla ilgili çeşitli güçlüklerinin olduğu ve temel düzeyde önermeleri kanıtlamada yetersiz kaldıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarının kanıt kavramlarının ve kanıtlama becerilerinin istenen düzeye getirilebilmesi için kanıt ağırlıklı derslerdeki öğretim yaklaşımlarının gözden geçirilmesi gerekmektedir. Bu derslerde genellikle öğretmenin anlatımına ve kanıtları oluşturmasına dayalı ders işlenmekte, öğrencilerin kanıt oluşturma sürecine katılmasına ve kendi akıl yürütmelerini kullanmalarına fırsat verilmemektedir. Öğrencilerin başarılarını belirlemeye yönelik olarak yapılan sınavlarda da genellikle, ders sorumlusu tarafından derste yapılmış olan veya kitapta yer alan kanıtlar sorulmakta, öğrencilerin hazır kanıtları ezberleyerek aynısını sınavda yazmaları, dersi geçecek notu almaları için yeterli olabilmektedir. Bu durum da öğrencileri, kanıtların mantığını anlamaya ve akıl yürütmeye değil ezberlemeye yöneltmektedir. Öğrencilerin kanıtlama becerilerinin geliştirilmesi için daha aktif katıldıkları, akıl yürüttükleri, tartıştıkları, birbirleriyle etkileşimde bulundukları öğretim ortamlarının oluşturulması gerekmektedir.

Bu çalışmanın sonuçları, öğretme deneyinin öğretme olayları bölümünü oluşturan sınıf çalışmalarına benzer öğrenme etkinliklerinin gerçekleştirilmesinin önemini açıkça ortaya koymaktadır. Bu amaçla sınıf içinde;

- öğrencilerin verilen matematiksel ifadelerin doğruluğu veya yanlışlığı için argümanlar üretip bu argümanların geçerliliğini tartışmaları,
- üretilen argümanlardan geçerli olanların belirlenip formel matematiksel kanıt olarak yazılması,
- yazılan kanıtların geçerliliğinin değerlendirilerek geçerli bir kanıtın nasıl olması gerektiğinin net olarak ifade edilmesi,
- hem başarı düzeyi hem kanıtlama biçimleri yönünden heterojen grupların oluşturulup öğrencilerin etkileşime girerek birlikte çalışmalarının sağlanması,
- sınavlarda öğrencilere, derste kanıtını gördükleri önermelerden farklı sorular sorulması,
- sınav kağıtlarının dağıtılıp öğrencilerin eksik ve hatalarını görmelerinin sağlanması,
- sınav kağıtlarından seçilen çeşitli öğrenci yanıtlarının sınıfa getirilerek doğru ve yanlışlarının tartışılması,
- sınav dışında öğrencilere kanıtlama ödevleri verilmesi ve bunların daha sonra sınıfta birlikte incelenmesi

şeklinde öğrenme etkinlikleri uygulanabilir.

Çok fazla sayıda öğrencinin yer aldığı kalabalık sınıflarda bu tür etkinliklerin yapılması güç olacaktır. Bu nedenle sınıfların şubelere ayrılması veya ders dışında uygulama saatlerinin belirlenip bu saatlerde küçük gruplar halinde ve yardımcı öğretim elemanları gözetiminde bu etkinliklerin gerçekleştirilmesi önerilmektedir. Bu çalışmalar, zorunlu dersler kapsamında yapılabileceği gibi, öğretim programlarında öğrencilere matematiksel akıl yürütme veya kanıtlamaya giriş türünde seçmeli dersler sunularak da yapılabilir.

Bu çalışmanın sonuçlarına göre öğrencilerin kanıtlama sürecindeki güçlüklerinde ve çalışma süresindeki ilerlemelerinde farklılıklar bulunmaktadır. Bu farklılıkların, çalışmanın başında araştırma kapsamına alınmayan ancak çalışma sürecindeki gözlemlerde ve öğrencilerin ifadelerinde ortaya çıkan bazı duyuşsal etkenlerle ve öğrencilerin geçmiş deneyimleriyle ilgili olabileceği düşünülmektedir. Öğrencilerin duyuşsal durumlarının ve geçmiş deneyimlerinin kanıtlama becerilerinin gelişimiyle olan ilişkisini ortaya çıkarmaya yönelik çalışmalar yapılması önerilebilir.

Kaynakça

Almeida, D. (2001). Pupils' proof potential. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 32(1),* 53-60.

Almeida, D. (2003) Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything*? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.

Antonini, S. & Mariotti, M. A. (2007). Indirect proof: an interpreting model. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 541–550.

Atwood, P. R. (2001). *Learning to construct proofs in a first course on mathematical proof*. Doctoral dissertation, Western Michigan University.

Baker, D. & Campbell, C. (2004). Fostering the development of mathematical thinking: Observations from a proofs course. *Primus, 14*(4), 345-353.

Bedros, V. (2003). *An exploratory study of undergraduate students' perceptions and understandings of indirect proofs.* Doctoral dissertation, University of Montana.

Bills, L. & Tall, D. (1998). Operable Definitions in Advanced Mathematics: The case of the Least Upper Bound. *Proceedings of PME 22, 2,* 104–111.

Blanton, M., Stylianou, D. & David, M. (2009). Understanding Instructional Scaffolding in Classroom Discourse on Proof. In D. Stylianou, M. Blanton & E. Knuth (Eds.), *The Learning and Teaching Proof Across the Grades* (pp.290-306). London: Routledge Publishers.

Brown, S. A. (2003). *The Evolution of Students' Understanding of Mathematical Induction: A teaching experiment*. Unpublished doctoral dissertation, University of California, San Diego.

César, M. (1998) Social interactions and mathematics learning. *Mathematics, education and society: Proceedings of the MEAS 1*, 110-119.

Chartrand, G., Polimeni, A. d. & Zhang, P. (2008). *Mathematical Proofs: A Transition To Advanced Mathematics (2nd ed.)*. Pearson International Edition.

Cobb, P. & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*, 83-94.

Cobb, P. & Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom videorecordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 213-228.

Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Educational Psychologist, 31 (3/4),* 175-190.

Engelhardt, P. V., Corpuz, E. G., Ozimek D. J. & Rebello, N. S. (2004). *2003 Physics Education Conference, AIP Conference Proceedings, 720*, 157-160.

Gholamazad, S. (2005). Proof as literate mathematical discourse in past and present: perspective on students' work. In G. M. Lloyd, M. Wilson, J. L. M. Wilkins & S. L. Behm (Eds.), *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Gibson, D. (1998). Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education, III*, pp.284-307. AMS

Goetting, M. M. (1995). *The College Student's Understanding of Mathematical Proof*. Doctoral dissertation, The University of Maryland.

Hanna, G. & De Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 40*, 329-336.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. In Bishop, A. J, Clements, M. A., Keitel, C., Kilpatrick, J.&Laborde, C. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, (pp.877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G., Selden, A. & Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking. In Gutierrez, A. and Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Pschology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, (pp.147-172). Netherlands: Sense Publishers.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on learning and teaching proof. In Lester, F. (Ed.), *Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics*, (pp.805-842).Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Heinze, A. & Reiss, K. (2003). *Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence.* Paper presented at the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24(4)*, 389-399.

Huber, G. L. (2003). Processes of decision-making in small groups learning. *Learning and Instruction, 13,* 255-269.

Knapp, J. (2006). A framework to examine definition use in proof. *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp.15-22

Knuth, E. & Elliott, R. (1997). Preservice secondary mathematics teachers' interpretations of mathematical proof. *Proceedings of the 19th Conference of Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, pp.545-551.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In Gutierrez, A & Boero, Steffe, L. P., *Handbook of Research on the Pschology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, (pp.173-204) Sense Publishers.

McCrone, S. S. (2005). The development of mathematical discussion: An investigation in a fifth grade classroom. *Mathematical Thinking and Learning, 7(2),* 111-133.

McCrone, S. M. S. & Martin, T. S. (2009). Formal Proof in High School Geometry: Student Perceptions of Structure, Validity, and Purpose. Teaching Proving by Coordinating Aspects of Proofs with Students' Abilities. In Stylianou, D. A.,. Blanton, M. L. & Knuth, E.J. (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across Grades: A K-16 Perspective*, (pp. 204-221). New York/Washington, DC: Routledge/National Council of Teachers of Mathematics.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 249-266.

Özer, O. (1998). *Soyut Matematik*, Orhun, N. (Ed.), Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi Yayınları.

Özer, O., Çoker, D. & Taş, K. (1999). *Soyut Matematik (4. Baskı)*. Bilim Yayıncılık.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative Evaluation and Research Methods* (3rd ed.) Rhousands Oaks, Calif. Sage Publications.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*, 23-41.

Peshkin, A. (1993). The Goodness of Qualitative Research. *Educational Researcher, 22*(2), 23-29.

Powell, A. B., Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 405-435.

Riley, K. J. (2003). *An Investigation of Prospective Secondary Mathematics Teachers' Conceptions of Proof And Refutations.* Doctoral dissertation, Montana State University.

Saeed, R. M. (1996). *An explatory study of college students' understanding of mathematical proof and the relationship of this understanding to their attitude toward mathematics*. Doctoral dissertation, Ohio University.

Sarı, M.,Altun, A.&Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: Örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40(2)*, 295-319.

Selden, J. & Selden, A. (1995). Unpacking the Logic of Mathematical Statements. *Educational Studies in Mathematics, 29 (2)*,.123-151.

Selden, A. & Selden, J. (2003). *Errors and misconceptions in college level theorem proving*. (Technical Report), Tennesse Technological University, Mathematics Department, 10.05.2008 tarihinde http://www.math.tntech.edu/techreports/TR_2003_3.pdf adresinden alınmıştır.

Selden, A. & Selden, J. (2007). *Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities*. (Technical Report), Tennesse Technological University, Mathematics Department, 10.05.2008 tarihinde http://www.math.tntech.edu/techreports/TR_2007_2.pdf adresinden alınmıştır.

Selden, J. & Selden, A. (2009). Teaching Proving by Coordinating Aspects of Proofs with Students' Abilities. In Stylianou, D.A, Blanton M. L., &. Knuth E. J (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across Grades: A K-16 Perspective*, (pp. 339-354), New York/Washington, DC: Routledge/ National Council of Teachers of Mathematics.

Selden, J , Selden, A. & McKee, K. (2008). *Improving Advanced Students Proving Abilities*. Paper for ICME-11 Topic Study Group 18: Reasoning, proof and proving in mathematics education. 28.11.2010 tarihinde. http://tsg.icme11.org/tsg/show/19 adresinden alınmıştır.

Smith, J.C. (2006). A sense-making approach to proof: Strategies of students in traditional and problem-based number theory courses. *Journal of Mathematical Behaviour, 25*, 73-90.

Steffe, L. P. (1983). The teaching experiment methodology in a constructivist research program. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, pp.469–471.

Steffe, L. P. & D'Ambrosio, B. (1996). Using teaching experiments to understand students' mathematics. In Treagust, D., Duit, R. & Fraser, B. (eds.) *Improving Teaching and Learning in Science and Mathematics*, (pp.65-76), New York: Teacher College Press.

Steffe, L. & Thompson, P. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and essential Elements, , In Lesh, R. A. & Kelly, A. E. (Eds.), *New Methodologies in Mathematics and Science Education,* (pp.267-306), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.Sundstrom, T. (2003). *Mathematical reasoning: writing and poof*. Prentice Hall, New Jersey, Pearson Education.

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching, 127*, 28-32.

VanSpronsen, H. (2008). *Proof processes of novice mathematics proof writers*. Unpublished doctoral dissertation, The University of Montana.

Weber, K.. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101–119.

Weber, K.. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behavior, 23,* 115–133.

Weber, K.. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behaviour*, *24*, 351-360.

Weber, K. & Alcock, L. J. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, *56(3)*, 209-234.

Weber, K. & Alcock, L. (2009). Semantic and Syntactic Reasoning in the Representation System of Proof. In Stylianou, D.A, Blanton M. L., &. Knuth E. J (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across Grades: A K-16 Perspective*, (pp. 323-338), New York/Washington, DC: Routledge/ National Council of Teachers of Mathematics.

Weber, K., Maher, C., Powell, A. & Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics, 68*, 247-261.

Yackel, E.; Cobb, P. & Wood, T. (1991). Small-Group Interactions as a source of Learning Opportunities in Second-Grade Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 22(5*), 390-408.

Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel Düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2006). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.